

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOI
TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES
UNIVERSITATIS TARTUENSIS
(DORPATENSIS)

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

XXIX

TARTU 1936

EESTI VABARIIGI TARTU ÜLIKOOLI
TOIMETUSED

ACTA ET COMMENTATIONES
UNIVERSITATIS TARTUENSIS
(DORPATENSIS)

A

MATHEMATICA, PHYSICA, MEDICA

XXIX

TARTU 1936

Sisukord. — Contenta.

1. **A. Öpik.** *Hoplocrinus* — eine stiellose Seelilie aus dem Ordovizium Estlands.
 2. **Alfred Kärnsa.** Vereinfachte Methoden zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten bei normaler Korrelation.
 3. **J. Nuut.** Eine nichteuklidische Deutung der relativistischen Welt.
 4. **Hugo Kaho.** Das Verhalten der Eiweissstoffe gesunder und abbaukranker Kartoffelknollen gegen Salze.
 5. **T. Lippmaa ja K. Eichwald.** Eesti taimed. II (51—100).
Summary: Estonian plants.
 6. **J. Nuut.** Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik.
 7. **A. Lüüs.** Données anthropologiques sur les nouveaux-nés estoniens.
 8. **Arnold Tudeberg.** Energieverluste im Eisenblech bei niederfrequenten Ummagnetisierung.
 9. **Wilhelm Anderson.** Existiert eine obere Grenze für die Dichte der Materie und der Energie?
-

***HOPLOCRINUS* — EINE STIELLOSE
SEELILIE AUS DEM ORDOVIZIUM
ESTLANDS**

VON

A. ÖPIK

MIT 2 TAFELN UND 4 ABBILDUNGEN IM TEXT

TARTU 1935



I. Einleitung.

Die Krinoidengattung *Hoplocrinus* wurde von C. Grewingk (1) aufgestellt, und dadurch der Streit zwischen Volborth und Eichwald über die Zugehörigkeit des *Apiocrinus dipentus* Leuchtenberg (2) abgeschlossen. Dieser *A. dipentus* wurde von Grewingk als einzige Art der Gattung betrachtet und muss dementsprechend als typische Art gelten.

Leuchtenberg beschreibt den *Apiocrinus dipentus* so: „diese Encriniten-Krone ist durch ihre regelmässige Form bemerkenswert und wird von 10 Schildern gebildet, wovon 5 den Ansatz des Stieles (den Kelch) und 5 andere, grössere die Brustrippen bilden, in deren Mitte die Ansätze für 5 Arme bemerkt werden. Fundort: Pulkowo.“

„Die 5 Kelchschilder, von denen der Stiel ausgeht, sind beinahe von gleicher Grösse, ebenfalls fünfseitig, und so gebildet, dass die kürzeste Seite nach dem Stiele gekehrt ist, die 2 längsten, leicht gebogenen, strahlenförmig von diesen in die Höhe auseinander gehen, und die 2 obersten Seiten die beiden zuletzt bemerkten durch einen von ihnen gebildeten rechten Winkel vereinigen. Zwischen je 2 der obersten Flächen dieser unteren 5 Kelchschilder erheben sich die anderen 5, die gleich den unteren fünfseitig, aber auch bedeutend grösser sind. Die kürzesten Seiten dieser Schilder bilden zusammen nach oben eine vieleckige, grosse Öffnung, die als Mundöffnung des Tieres zu betrachten ist, an deren Rande fünf stark vorspringende, fast zylindrische Ansätze zur Befestigung der Fühlerarme bemerkt werden, von denen leider eben so wenig, wie vom Stiele irgend eine Spur erhalten ist. Die Oberfläche aller Schilder erscheint unter sehr starker Vergrösserung nicht ganz glatt, sondern wie fein und unregelmässig gerunzelt.“

„Bemerkenswert ist bei diesem Encriniten, dass die Zahl fünf sich überall wiederholt, weshalb ich ihn auch *dipentus* nenne. Die Höhe der Krone beträgt 8''' und ihre Breite beinahe 7'''.“

Nun fehlte diese Untersuchung Leuchtenberg's (2) dem Verfasser der vorliegenden Schrift, und Herr R. Hecker (Leninograd, Mus. der Akademie der Wiss.) war so freundlich eine Abschrift der eben angeführten Zitate samt Kopien der Leuchten-

berg'schen Abbildungen uns zuzusenden. Auch berichtet Herr R. Hecker, dass das Original Leuchtenberg's in den Sammlungen Leningrads leider nicht mehr zu finden war. Das Original des *A. dipentas* muss, ebenfalls nach der Meinung R. Hecker's, aus den C_1 -Schichten (Tallinna-Stufe, „echter“ Echinosphäritenkalk) stammen, welche als jüngstes Anstehendes bei Pulkowo in Frage kommen.

Die oben angeführte Beschreibung des *Apiocrinus dipentas* und dessen Abbildungen stimmen in den Hauptzügen tatsächlich mit dem bei Grewingk (1) dargestellten Exemplare überein. Es fehlt zwar bei der Leuchtenberg'schen Seelilie die Superradialplatte, ihre Form und Lage sind aber noch zu erkennen. Auch ist in den Leuchtenberg'schen Abbildungen Fig. 9 das zum Beschauer gerichtete armtragende rechte hintere Radiale sechsseitig, indem es einen Ausschnitt für das fehlende Superradiale aufweist. Ganz ähnliche Verhältnisse sind auch beim Grewingk'schen Original entwickelt, und somit gehören alle beide in dieser Hinsicht in dieselbe fünfarmige Gattung hinein. Offen bleibt nun die Frage nach dem Stiel des *Apiocrinus dipentas*, da auch Leuchtenberg (2) darüber nichts berichten konnte. Auf einem Umweg können wir aber auch hier zu einigen, allerdings unsicheren, Schlüssen gelangen. So bemühte sich Eichwald (3) zu beweisen, dass der Rest des an seinen Exemplaren (Taf. VIII, Fig. 2 und 4) sichtbaren Stieles einen besonderen verschmolzenen Tafelkranz darstelle. Letzteren brauchte er aber unbedingt, um den *Apiocrinus dipentas* und auch den so eigentümlichen *Baerocrinus* zu einem *Homocrinus* zu machen, — ein Umstand, den auch Wachsmuth und Springer (4) nicht verstehen konnten. Offenbar muss Eichwald Exemplare mit reduziertem Stiel besessen haben, wobei er die kolumnale Restplatte für einen schwach entwickelten infrabasalen Plattenkranz hielt und diesen seinen Standpunkt sehr eifrig verteidigte. Die Kelche dieser „Homocrinen“ Eichwalds sollen nun aus Pulkowo stammen, also aus Gegenden, wo auch Leuchtenberg sammelte. Unser Umweg besteht nun in folgendem: möglicherweise handelt es sich hier bei Eichwald und Leuchtenberg um eine und dieselbe Gattung mit reduziertem Stiel, also ganz wie es am Originale Grewingk's und bei anderen *Hoplocrinus*-Arten der Fall ist.

Dass Eichwald die Stiellosgkeit der „Homocrinen“

übersehen hatte, ist sehr begreiflich, da sein Aufsatz in erster Linie Volborth's (5) wohlbegründete Stellungen zu bekämpfen zum Ziele hatte, nicht aber die wahre Natur dieser Seelilie zu klären. Ferner sind im allgemeinen die Lokalitätsangaben bei Eichwald erfahrungsmässig unzuverlässig, so dass, obwohl er selber Pulkowo nennt, die „Homocrinen“ sehr leicht aus Estland stammen konnten. Dieses Bedenken verringert übrigens den Wert unseres Umweges sehr.

Sieben Jahre nach dem Erscheinen der Untersuchung von Grewingk (1) unterwirft Fr. Schmidt (9) das *Hoplocrinus*-Problem einer neuen Prüfung. „Wenn ich die Streitfrage wieder aufnehme, die unterdessen sieben Jahre geruht hat“, schreibt Fr. Schmidt in den *Miscellanea* II, „so geschieht es, weil ich einiges neue Material zur Lösung derselben erhalten habe, auf das ich eine eigene Ansicht gründen kann, die, wie sich ergeben wird, einestheils mit Volborth's, anderenteils mit Eichwald's Ansicht übereinstimmt“. Der von Fr. Schmidt gewählte goldene Mittelweg war in diesem Falle ein Irrweg, da *Baerocrinus ungerni* in keinem Falle zur Art und Gattung des *Hoplocrinus dipentae* gerechnet werden kann. Aber Fr. Schmidt gibt eine naturtreue und genaue Darstellung seines neuen und tatsächlich guten Materials, wodurch der ursprüngliche Begriff der Art *Apiocrinus dipentae* Leuchtenberg 1843 geklärt werden kann. Fr. Schmidt veröffentlicht zwei Seelilien aus Pawlowsk, aus der nächsten Nachbarschaft der typischen Lokalität des echten *dipentae* Leuchtenberg, und es unterliegt keinem Zweifel, dass es sich hier in einem Falle gerade um diese Art handelt. Nach Fr. Schmidt (9), S. 7 „befinden sich unter den etwa sechs vollständigen Exemplaren des *Hybocrinus dipentae* der Volborth'schen Sammlung etwa drei, die nur 4 Arme zeigen, indem zwei aneinanderstossende Täfelchen der zweiten Reihe keine Arme tragen“. Ein solches Exemplar ist hier nun wiedergegeben (Textfig. 1a—1b), wobei das rechte hintere Radiale tatsächlich keinen Armansatz besitzt. Dieser Armansatz ist aber beim Leuchtenberg'schen Exemplar [Leuchtenberg (2), Fig. 9] vorhanden, und man sieht ihn auch an einem Kelch, den Fr. Schmidt (9), Taf. I, Fig. 6—6b abbildet. Diese Abbildung ist auch bei uns Textabb. 1d wiedergegeben. Diese letztgenannte fünfarmige Krinoide halten wir nun für den echten *Apiocrinus dipentae* Leuchtenberg, die vierarmige Form aber (Textabb. 1a—1b) muss als eine besondere, noch unbenannte

Art angesehen werden, welche vielleicht schon in eine andere Gattung, z. B. *Baerocrinus*, gehört.

Dabei wird auch klar, dass das Grewingk'sche Original (vergl. Taf. I, Fig. 1—3) nicht zu *dipentas* gerechnet werden kann, sondern eine andere Art darstellt. Es handelt sich aber auch hier um dieselbe Gattung *Hoplocrinus* Grewingk, mit *Apiocrinus dipentas* Leuchtenberg als Typus, obwohl Grewingk beim Aufstellen der Gattung eine andere Art (unseren *Hoplocrinus estonus* n. sp.) für den *dipentas* hielt.

II. Beschreibung der Arten.

Hoplocrinus dipentas (Leuchtenberg 1843).

Textabb. 1d—1e und 2.

M. v. Leuchtenberg (2); *Hybocrinus dipentas* (Leuchtenberg) Fr. Schmidt (9), partim; non *Hoplocrinus dipentas* (Leucht.) apud Grewingk (1), Taf. I, Fig. 1a—1f; *Hybocrinus* sp. A. Öpik (7).

Unsere Textabbildungen zeigen aufs beste den Unterschied zwischen dem *Hoplocrinus dipentas* (Leucht.) (Fig. 1d—1e) und dem weiter zu beschreibenden *Hoplocrinus estonus* n. sp. Bei dem

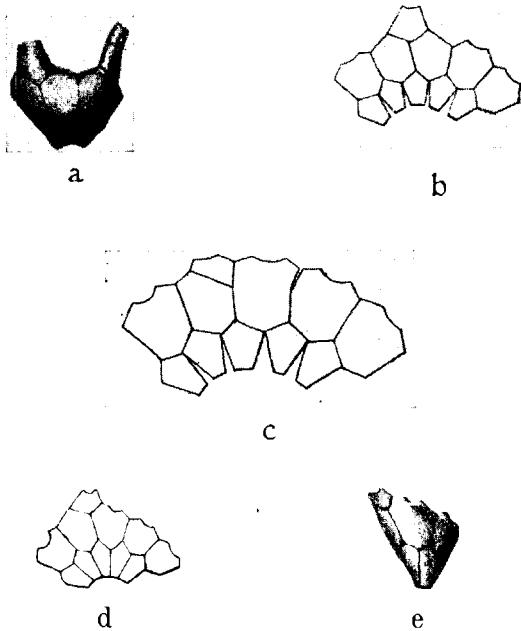


Abb. 1. Aus Fr. Schmidt (9), Taf. I, Fig. 4—6. 1a—1b — „*Hoplocrinus dipentas*“, aus Pawlowsk, das Diagramm und die Hintenansicht eines vierarmigen Kelches (offenbar ein *Baerocrinus*). d und e — ein fünfarmiger Kelch, offenbar der echte *dipentas*, aus Pawlowsk. 1c — *H. estonus* n. sp., Diagramm eines Kelches aus D₁, Estland.

echten *dipentas* ist die superradiale Platte bilateral symmetrisch und stützt sich gleichmässig auf zwei radiale Platten. Das Superradiale ist ausserdem hoch gehoben, die beiden hinteren Radialia sind grösser als die anderen, der Kelch ist daher hinten bedeutend höher als vorne und erscheint deshalb schief. Bei *H. estonus* dagegen (Textfig. 1 c, das Diagramm) stützt sich das hier unsymmetrische Superradiale nur auf das linke hintere Radiale und der Kelch ist viel gleichmässiger gebaut.

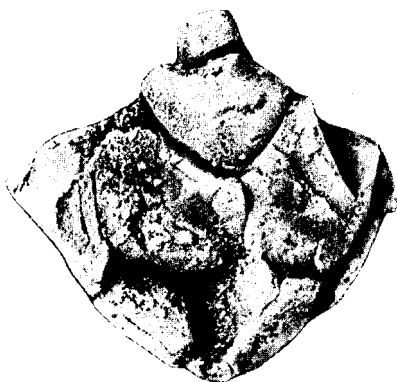


Abb. 2. *Hoplocrinus* cf. *dipentas* (Leucht.), ein zerdrückter Kelch aus den unteren C_2 -Schichten (C_2a der Kukruse-Stufe) von Kohtla. Es ist dasselbe Exemplar wie bei A. Öpik (7), Taf. II, Fig. 16. $\times 2$ der nat. Grösse. Das Superradiale ist symmetrisch, doch sitzt es etwas tiefer als bei dem Schmidt'schen Exemplare (Textabb. 1).

Textabb. 2 zeigt noch einen Kelch aus Estland, der denen von Pawlowsk (Textabb. 1 d, 1 e) fast ganz gleicht. Obwohl er zerdrückt erscheint, ist seine schiefe Bauart ganz deutlich erkennbar, weshalb er auch früher zum „*Hybocrinus*“ gerechnet wurde. Doch lässt sich auch hier nichts Bestimmtes über die Säule feststellen.

An der Gattungsdiagnose [Grewingk (1)] ist nichts zu ändern, da auch der echte *Hoplocrinus dipentas* (vergl. Abb. 1 c — 1 d im Text) 1) monozyklisch ist, 2) 5 B und 5 R und ein trapezoidales Superradiale besitzt, 3) unverzweigte Arme hat, denen auf den Radialia hufförmige Artikulationsflächen entsprechen. Über das Tegmen und die Säule siehe unter *H. estonus*.

Hoplocrinus estonus n. sp.

Textabb. 1c und 3; Taf. I, Fig. 1—4.

Hoplocrinus dipentus (Leucht.) apud Grewingk (1), Jaekel (6) et A. Öpik (7); *Hybocrinus dipentus* (Leucht.) apud Fr. Schmidt (9). *Hoplocrinus dipentus* (Leucht.) apud Zittel, Z.-Eastman etc.

Die wichtigsten Unterschiede dieser Art (Gestalt der super-radialen Platte, Textabb. 1) wurden unter *H. dipentus* angeführt, und eine sehr genaue Beschreibung ist von Grewingk (1) gegeben worden.

Holotyp ist das Exemplar auf Taf. I, Fig. 1—3, aus den D₁-Schichten aus der Umgebung von Tallinn, Estland (vergl. die Fussnote am Schlusse unseres Aufsatzes). Es ist auch gleichzeitig das Original Grewingk's zu seinem *Hoplocrinus* und erscheint auch in allen Ausgaben des Zittel'schen Lehrbuches. Bei Zittel wie bei Grewingk ist der Kelch restauriert wiedergegeben, während in Wirklichkeit beim Original selbst die Platten etwas verschoben sind (Taf. I, Fig. 1). Aus den Angaben Grewingk's geht hervor, dass sein Original aus Estland, aus der Umgebung von Tallinn stammt. Als Schicht nennt er den Vaginatenskalk, was der derzeitigen Terminologie nach genügend genau war, jetzt aber als ganz ungenügend erscheint. Sein Original stammt ohne Zweifel aus den D₁-Schichten (die Jõhvi-Stufe, die Schmidt'sche Jewe'sche Schicht), welche ja ebenfalls bei Tallinn vorhanden sind. Erstens sehen wir am Original Grewingk's starke Verkieselungserscheinungen (verkieselte Armglieder), was gerade für die D₁-Fossilien charakteristisch ist; und zweitens sind alle anderen Funde dieser Art (ca 20 Kelche) vom Verfasser in den D₁-Schichten gemacht worden.

Die von Grewingk (1) gegebene Beschreibung braucht nur noch in wenigen Punkten ergänzt zu werden. Als Wesentlichstes wäre die Stiellosigkeit des *Hoplocrinus estonus* hervorzuheben. Der Bau des Stieles wird von Grewingk so dargestellt: „von der Säule nur 4 runde, aussen etwas konvexe Glieder erhalten, deren 7—8 auf 1 Lin. Keine Gelenkfläche sichtbar und statt derselben eine warzige Protuberanz. Eine kantige Fortsetzung der Kelchbasis, wie Eichwald sie darstellt, wird am revaler Exemplar nicht bemerkt.“ Bei uns ist diese Kelchbasis auf Taf. I, Fig. 2 dargestellt. Es besteht hier ein

abgerundet fünfseitiges Stielrudiment ohne sichtbaren zentralen Kanal, und die Warzen werden durch Verkieselungssphäroide gebildet.

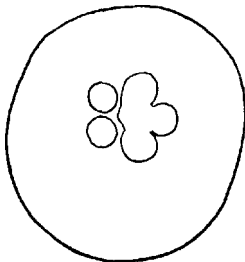


Abb. 3. Schnitt durch das Stielrudiment (durch die kolumnale Platte) eines Kelches des *Hoplocrinus estonus* aus den D₁-Schichten von Aluvere, Estland. Der Schliff ist schräg zur Achse geraten. Im proximalen Teil sind die in den Kelch mündenden Kanäle untereinander verschmolzen. Die mehr distal getroffene Seite zeigt zwei gesonderte Kanäle. Das ganze Gebilde muss demnach aus einer Säule mit fünf separaten axialen Kanälen hervorgegangen sein. Ca $\times 10$ des nat. Grösse.

Der an einem anderen Kelch durchgeführte Schliff (Textabb. 3) zeigt den Innenbau des Stielrestes.

Allen vorhandenen Exemplaren dieser Art, deren grösste Zahl die D₁-Schichten (deren oberer Teil, mit *Bothriocidarispahleni*) von Aluvere lieferten, fehlt ebenfalls eine echte Säule. Entweder besteht hier ein kurzes Rudiment, wie beim Original-exemplar Grewing's, oder die Säule oder der Säulenrest ist zu einer pentagonalen, äusserlich unperforierten, kolumnalen Platte umgewandelt. Eine solche kolumnale oder zentrodorsale Platte sehen wir am Exemplar auf Taf. I, Fig. 4.

Der Bau des Tegmens ist immer noch unbekannt. Wie man am Originale Grewing's (Taf. I, Fig. 3) beobachten kann, bestand die Kelchdecke aus kleinen zahlreichen Platten. Auch die Ambulakrallrinnen der unverzweigten Arme waren von ähnlichen Platten überdeckt. An manchen Exemplaren erscheint der Oberrand der drei vorderen Radialplatten mehr oder weniger deutlich kreneliert. Dieses erinnert einigermaßen an *Hybocrinus tumidus* Billings, wo allerdings die Krenelierung an der analen Platte erscheint [F. Springer (8)]. Die Armglieder tragen auf ihren Gelenkflächen je eine mediane Rinne (Taf. I, Fig. 3).

***Hoplocrinus grewingkii* A. Ö.**

Taf. II, Fig. 1—3.

A. Öpik (7), S. 17, Taf. II, Fig. 14, 15.

Die Zahl und Anordnung der Tafeln (B 5, R 5 + 1 Superradiale) gleicht jenen des Genotypus (*H. dipentus*). Von diesem und von *H. estonus* unterscheidet sich aber die Art *grewingkii* 1) durch ihre glatten, rinnenförmig vertieften Nähte und 2) durch die recht grobe Körnung der Tafeln. Die allgemeine Gestalt, gleichwie die Lage und Form des Superradiale hat aber *H. grewingkii* mit *H. estonus* gemeinsam.

Besonders tief erscheinen die Nähte zwischen den Basalia (Taf. II, Fig. 3). Die Körnung der Tafeln ist dicht, grob, und die Warzen verlaufen in regelmässigen Reihen, gleichsinnig mit der Naht zwischen dem basalen und dem radialen Tafelkranze.

Der Kelchrand ist in den Interradien nach innen gewölbt, wodurch bei guter Erhaltung ein sternförmiger Querschnitt am Kelchrande entsteht. Die Säule ist hier ebenfalls rudimentär, besitzt einen vernalzten fünfstrahligen Zentralkanal und hat einen kleineren Durchmesser als bei *H. estonus*. Eine Rückbildung der Säule zu einer zentrodorsalen Platte wird nicht beobachtet. Dennoch war auch *Hoplocrinus grewingkii* eine freilebende Seelilie.

Hoplocrinus grewingkii ist in der Kukruse-Stufe (C₂) von Peetri und vom Sõjamägi bei Tallinn gefunden worden.

***Hoplocrinus tallinnensis* n. sp.**

Taf. II, Fig. 4.

H. dipentus in A. Öpik (7), Taf. II, Fig. 12.

Den Typus stellt das abgebildete ganze Exemplar aus den C₂-Schichten (Kukruse-Stufe) der alten Schützengräben am Sõjamägi bei Tallinn dar. Wegen der glatten Oberfläche des Kelches ähnelt dieses Exemplar dem *Hoplocrinus dipentus* und *estonus*. Doch sind bei der neuen Art die Radialia gleich hoch und breit, also fast quadratisch, während bei anderen Arten diese Platten höher und schmaler erscheinen. Es fehlt auch bei *H. tallinnensis* jegliche Spur einer Säule, und die Basalia laufen spitz zusammen. Daher sind die Basalia hier vierseitig trapezoidal,

während bei Arten, wo noch eine Säule als Rudiment oder als Zentrodorsale erhalten ist, die basalen Platten fünfseitig erscheinen. Als fünfte Seite kommt dann die Berührungsnaht mit der Säule hinzu.

Hoplocrinus tallinnensis ist etwas kleiner als *H. estonus* und kommt in dieser Hinsicht dem *dipentas* nahe.

***Hoplocrinus pseudodicyclicus* n. sp.**

Taf. I, Fig. 5 und Textabb. 4.

Holotyp ist der abgebildete einzig vorhandene kleine Kelch aus den C₂-Schichten (Kukruse-Stufe) vom Sõjamägi bei Tallinn.

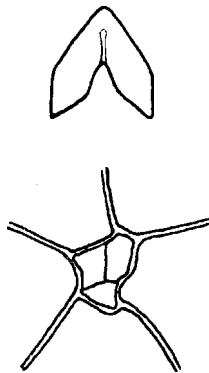


Abb. 4. *Hoplocrinus pseudodicyclicus* n. sp. Oben — ein Armglied mit scharfer Aussenkante und Medianrinne. Unten — Basisansicht, das in drei Täfelchen zerfallene Säulenrudiment zeigend. Stark vergrössert.

Diese Art unterscheidet sich von den anderen durch die spitz-konische Gestalt des Kelches und durch die scharfe, spitz-winklge Aussenkante der Armglieder. Bei anderen Arten dieser Gattung sind die Armglieder abgerundet, wie das z. B. bei *H. estonus*, Taf. I, Fig. 3, zu sehen ist. Die Säule fehlt hier ganz. Anstatt eines Stielrudiments oder einer zentrodorsalen Platte finden wir bei *H. pseudodicyclicus* drei kleine unregelmässig gestaltete Platten, welche als Reste der Säule anzusehn sind (Textabb. 4). Möglicherweise haben wir es mit einer abnormen Erscheinung zu tun, die bis auf weitere Funde als individuell zu betrachten wäre.

***Hoplocrinus?* sp.**

Taf. I, Fig. 5.

Eine genaue Bestimmung dieses Kelches ist unmöglich, da bei ihm die radialen Platten des analen und des linken hinteren Radius fehlen. Das vorhandene hintere rechte Radiale ist, wie bei allen *Hoplocrinus*-Arten, sechsseitig, indem es auch die Berührungsfläche mit der superradialen, resp. Analplatte aufweist. Der nach unten spitz ausgezogene basale Tafelkranz endigt hier aber mit einem grossen Säulenfragment, so dass von einer Reduktion der Säule nicht mehr die Rede sein kann. Ausserdem hat der Säulenkanal einen fünfstrahligen Querschnitt und ist nicht, wie bei *H. estonus* (Textabb. 1), in fünf besondere Kanäle geteilt.

Fundort: D₁-Schichten von Aluvere, Estland. Zusammen mit zahlreichen Exemplaren des *H. estonus* gefunden.

III. Einige Ergebnisse.

Die hier beschriebenen Arten des *Hoplocrinus* sind alle säulenlos. Sie haben sich schon in frühester Jugend vom Substrate abgelöst, um zum freien Bodenleben überzugehen. Der Stielkanal ist vernarbt, und vom Stiel selbst ist ein kurzes Rudiment, oder ein Zentrodorsale, oder nichts mehr übriggeblieben.

Die systematische Eingliederung des *Hoplocrinus* (Ch. Wachsmuth in Eastman-Zittel 1913) wird durch die Säulenlosigkeit der Arten nicht gestört. Diese Gattung bildet ein Glied der Crinoidea Inadunata (Fistulata), aus der Familie der *Hybocrinidae*. Von den vier Gattungen dieser Familie weisen drei (*Hybocystis*, *Hoplocrinus* und *Baerocrinus*) dem Typus gegenüber recht grosse und verschieden gerichtete Reduktionserscheinungen auf. Es sind Spezialisierungen innerhalb einer relativ jugendlichen und primitiven mittelordovizischen Formenreihe. Dieser altpaläozoische Seitenzweig des Krinoidenstammes erlischt offenbar frühzeitig, und der stiellose *Hoplocrinus* ist wohl nicht als Ahne der späteren stiellosen artikulaten Seelilien (Comatulidae) anzusprechen.

Stratigraphisch verteilen sich die Arten in folgender Weise:

- | | | | |
|----|--|---------------------------------|--|
| 1. | <i>Hoplocrinus dipentus</i> (Leucht.) | C ₁ | (Pulkowo und Pawlowsk) und C ₂ (untere Schichten Estlands). |
| 2. | <i>Hoplocrinus tallinnensis</i> n. sp. | C ₂ | } Estland |
| 3. | „ <i>pseudodicyclicus</i> n. sp. | C ₂ | |
| 4. | „ <i>grewingki</i> Öpik | C ₂ , C ₃ | |
| 5. | „ <i>estonus</i> n. sp. | D ₁ | |
| 6. | „ (?) sp. | D ₁ | |

Es handelt sich also um Krinoiden aus dem oberen Mittelordovizium (etwa Black River bis Trenton), welche bis jetzt nur aus Estland und dem Ostbaltikum bekanntgeworden sind.

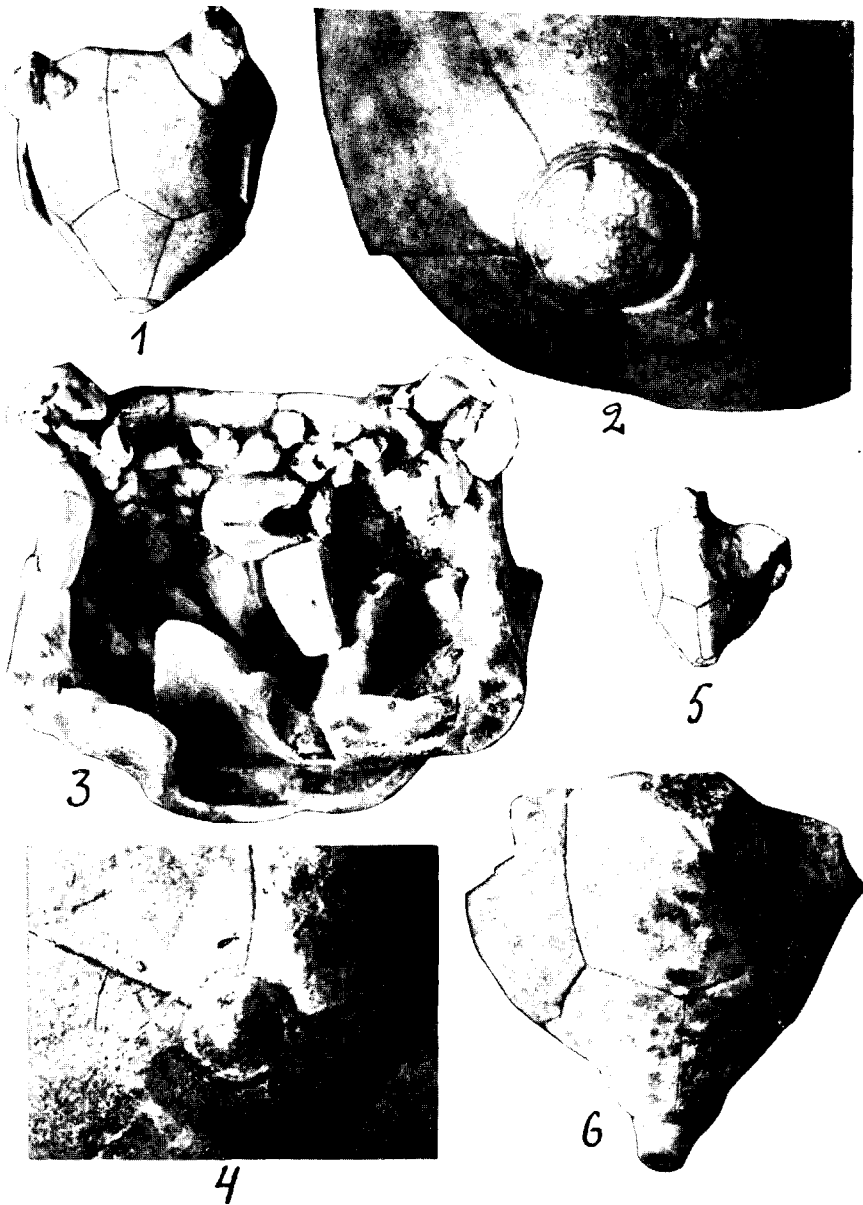
Die Stratigraphie der Arten erlaubt nicht, nähere phylogenetische Beziehungen zwischen ihnen aufzustellen. Die mehr spezialisierten, ganz stiellosen Arten sind nämlich älter, als der weniger spezialisierte, mit einem Stielrudiment versehene *H. estonus*.

Zum Schluss müssen noch die Lokalitätsangaben bezüglich des *Hoplocrinus* bei Zittel berichtigt werden. Die im Lehrbuche Zittel's 1921, Fig. 268 und Eastman-Zittel 1913, Fig. 312 als *Hoplocrinus dipentus* abgebildete Seelilie ist das uns vorliegende, auf Taf. I, Fig. 1—3 abgebildete Original Grewingk's (*H. estonus* n. sp.). Es stammt aus der Umgebung von Tallinn¹⁾, Estland und nicht aus „St. Petersburg“. Ferner: das Hauptgebiet der Hoplokrinen ist Estland, und nur eine Art ist in Pulkowo und Pawlowsk gefunden worden.

1) Fr. Schmidt (9) gibt dabei einen von Tallinn ca 40 km westlich gelegenen Fundort an („einen Kopf aus dem Vaginatenkalke von Leetz bei Baltischport, der noch von Ulprecht's Zeiten her im Universitätsmuseum zu Dorpat sich befindet“). Aber auch hier, auf der Halbinsel Paldiski, treten die D₁-Schichten auf. Diese Zeilen bei Fr. Schmidt beziehen sich sicherlich auf denselben, obengenannten und bei uns als *H. estonus* abgebildeten Kelch. G. M. Ulprecht war „Inspector des Naturaliencabinets“ in den Jahren 1804—1813.

Literatur.

- (1). C. Grewingk „Über *Hoplocrinus dipentus* und *Baerocrinus ungerni*“. Dorpat 1867.
- (2). Maximilian, Herzog von Leuchtenberg „Beschreibung einiger neuen Thierreste der Urwelt aus den silurischen Kalkschichten von Zarskoje Sselo“. St. Petersburg 1843.
- (3). E. von Eichwald „Die *Rhytina borealis* und der *Homocrinus dipentus* in den Lethaea Rossica“. Bull. de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou 1866.
- (4). Ch. Wachsmuth and F. Springer „On *Hybocrinus*, *Hoplocrinus* and *Baerocrinus*“. Americ. Journal of Science 1883.
- (5). A. v. Volborth „Über die angeblichen Homocrinen der Lethaea Rossica“. Bull. de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou 1866.
- (6). O. Jaekel „Phylogenie und System des Pelmatozoen“. Paläontologische Zeitschrift 1918.
- (7). A. Öpik „Beiträge zur Kenntnis der Kukuruse-(C₂-)Stufe in Eesti“ I. Tartu 1925. (Acta et Comm. Univ. Tart. (Dorp.) A VIII 5.)
- (8). F. Springer „On a Trenton Echinoderm Fauna at Kirkfield, Ontario“. Ottawa 1911.
- (9). Fr. Schmidt „Miscellanea silurica“ II. St.-Petersburg 1874.





Erklärung der Tafeln.

Alle Stücke befinden sich im Geol. Museum der Universität Tartu. Alle, ausser Taf. I, Fig. 1—3, sind vom Verf. gefunden.

I.

- Fig. 1—3. *Hoplocrinus estonus* n. sp., Holotyp, aus den D₁-Schichten Estlands. Bei Grewingk (1) und bei Zittel und Z.-Eastman im bekannten Lehrbuche der Paläontologie ist dieses Stück als *H. dipentus* angeführt. Fig. 1 zeigt $\times 1,2$, Fig. 2 — $\times 5,6$, Fig. 3 — $\times 2,7$ der nat. Grösse.
- Fig. 4. *Hoplocrinus estonus* n. sp., mit einem Zentrodorsale anstatt der Säule. $\times 4$ der nat. Grösse. D₁, Aluvere, Estland.
- Fig. 5. *Hoplocrinus pseudodicycliscus* n. sp., $\times 1,2$ der nat. Grösse. C₂-Schichten vom Sõjamägi bei Tallinn. Holotyp.
- Fig. 6. *Hoplocrinus*? sp. D₁-Aluvere, Estland. $\times 3,5$ der nat. Grösse.

II.

- Fig. 1—3. *Hoplocrinus grewingki* A. Ö., aus den C₂-Schichten vom Sõjamägi bei Tallinn. Fig. 3 — Holotyp, Dorsalansicht, $\times 2$ der nat. Grösse; Fig. 2 — ein isoliertes Radiale und Fig. 1 — ein isoliertes Basale, beide $\times 2$ der nat. Grösse.
- Fig. 4. *Hoplocrinus tallinnensis*, Holotyp, $\times 2$ der nat. Grösse. C₂-Schichten von Tallinn.

**VEREINFACHTE METHODEN ZUR
BERECHNUNG DES KORRELATIONSKOEFFIZIENTEN
BEI NORMALER KORRELATION**

VON

ALFRED KÄRSNA

TARTU 1935

Die erste Aufgabe der Korrelationsrechnung bildet die Bestimmung des Korrelationskoeffizienten. Diese Aufgabe ist theoretisch einfach, ihre praktische Ausführung jedoch sehr zeitraubend und mit verschiedenen Schwierigkeiten verbunden.

Zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten auf Grund von 1000 Wertepaaren sind, je nach der Größe der Zahlen, 3—6 Stunden erforderlich. Oft ist auch eine genaue Ermittlung des Korrelationsfaktors gar nicht notwendig und genügt für praktische Zwecke schon eine annähernde Schätzung der Güte der Korrelation. Deshalb wäre eine vereinfachte numerische und graphische Methode zur Berechnung des Korrelationskoeffizienten von großem Werte. Von den schon vorhandenen Methoden ist aber keine einzige vollständig befriedigend, denn im besten Falle wird die Dauer der Rechenarbeiten um das zehnfache verkürzt, d. h. bei 1000 Wertepaaren auf $\frac{1}{2}$ bis 1 Stunde reduziert, was in manchen Fällen immerhin zu viel ist. Außerdem verlangen einige Methoden auch eine große Geläufigkeit im mathematischen Rechnen (z. B. die Pearson'sche Methode des Punktezählens).

Die zwei folgenden Methoden, von denen die eine auf der Messung des Korrelationsfeldes, die andere auf dem Abzählen der Punkte beruht, sind von den erwähnten Mängeln frei.

Beide Methoden sind bei normaler Korrelation vollständig genau. Bei nicht normaler Korrelation ist der erhaltene Koeffizient mit einem gewissen Fehler behaftet, jedoch genügt uns in diesem Falle auch der nach der allgemein gebräuchlichen Formel berechnete Koeffizient nicht ganz, und es ist außer seiner Bestimmung noch die Berechnung der Parameter höheren Grades erforderlich. Die Regressionsgleichung nimmt alsdann eine ganz andere Gestalt an. Sollte das Bestimmen derselben erforderlich sein, so würde die Berechnung der Parameter höheren Grades viel Zeit in Anspruch nehmen, wobei die mühevollen Bestimmung des ersten Korrelationskoeffizienten schon nicht mehr in Betracht käme.

Falls die Regressionskurve eine Gerade darstellt, sind die beiden zu beschreibenden Methoden sehr brauchbar.

In beiden Fällen muß zuerst das Korrelationsfeld gezeichnet werden, um feststellen zu können, ob überhaupt eine Korrelation vorhanden ist.

Die sich auf Messung des Feldes stützende Methode erfordert zur Durchführung der Rechnung bei einer beliebigen Zahl von Punkten 2—3 Minuten, während die andere Methode soviel Zeit beansprucht, als für das Zählen der Punkte notwendig ist (bei 1000 Punkten z. B. 5 Minuten). Bei einer kleineren Zahl von Punkten (unter 30—50) ist es ratsam die zweite Methode zu gebrauchen, die in solchen Fällen genauere Resultate liefert. Bei 30—50 und mehr Punkten sind beide Methoden gleich gut. Bei einer größeren Zahl von Punkten (300—500) ist dagegen die erste Methode vorteilhafter, da sie weniger Zeit in Anspruch nimmt.

Wenn wir im Korrelationsfelde $(x; y)$ (Fig. 1) die Dichte auf der III. Achse abtragen (z), so erhalten wir die sogenannte Korrelationsfläche $z = f(x; y)$, wobei $z dx dy$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß der Punkt ins Gebiet ds fällt (x bis $x + dx$, y bis $y + dy$).

Im Falle einer normalen Verteilung ergeben alle vertikalen Schnitte $x = \text{konst.}$ oder $y = \text{konst.}$ die Gauss'sche Kurve, wobei das Zentrum derselben auf der Regressionsgeraden $y = mx$ liegt.

$$m = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \text{ wenn wir } x = \text{konst.}, \text{ und}$$

$$m = \frac{1}{r} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \text{ wenn wir } y = \text{konst. setzen}$$

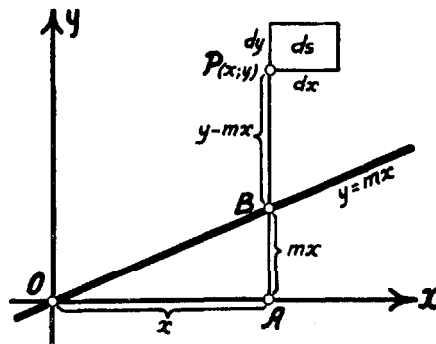


Fig. 1.

(r ist der Korrelationskoeffizient, σ_x, σ_y sind die mittleren Abweichungen der x - und y -Werte). Also:

$$z_A = z_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\frac{z_P}{z_A} = e^{-\frac{y^2 - 2mxy}{2\sigma_y^2}}$$

$$z_A = z_B \cdot e^{-\frac{m^2 x^2}{2\sigma_y^2}}$$

$$z_P = z_A \cdot \frac{z_P}{z_A} = z_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2 - 2mxy}{2\sigma_y^2}}$$

$$z_P = z_B \cdot e^{-\frac{y^2 - 2mxy + m^2 x^2}{2\sigma_y^2}}$$

Betrachten wir die Linien gleicher Dichte, so ist $z_P = \text{konst.}$

$$z_O \cdot e - \frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2 - 2mxy}{2\sigma_y^2} = \underbrace{z_O \cdot e}_{\text{konst.}} - k$$

Die Gleichung der genannten Linien ist

$$-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2 - 2mxy}{2\sigma_y^2} = -k, \text{ oder}$$

$$\sigma_y^2 x^2 + \sigma_x^2 y^2 - 2m\sigma_x^2 xy = \underbrace{2k\sigma_x^2 \sigma_y^2}_{\text{konst.}}$$

Diese ergeben eine Kurve 2-ten Grades $ax^2 + by^2 + 2cxy = d$. Betrachten wir die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix} = ab - c^2.$$

$$\Delta = \sigma_y^2 \sigma_x^2 - m^2 \sigma_x^4 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 - r^2 \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} \sigma_x^4 = \sigma_y^2 \sigma_x^2 (1 - r^2) > 0,$$

da $r < 1$, falls wir es nicht mit einem funktionalen Zusammenhang zu tun haben. Da $\Delta > 1$ ist, sind die Linien gleicher Dichte Ellipsen.

Wenn das Steigungsmaß der Hauptachsen der Ellipse $\mu = \tan \alpha$ ist, so ist

$$\tan 2\alpha = \frac{2m\sigma_x^2}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = \frac{2rk}{1 - k^2}, \text{ wo } k = \frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

$$\text{oder } \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2rk}{1 - k^2}, \text{ wo } r = \frac{\mu(1 - k^2)}{k(1 - \mu^2)} \text{ ist.}$$

Die erhaltene Formel gibt die Möglichkeit nach dem gezeichneten Felde r zu berechnen. Für eine bestimmte Kurve der gleichen Dichte ist (Fig. 2) $OA = c\sigma_y$ und $OB = c\sigma_x$, wo c konstant ist, und $\frac{OA}{OB} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = k$. Da dieses für jede Kurve gleicher Dichte gilt, so gilt es auch für die Kurve, außerhalb welcher keine Punkte mehr vorhanden sind.

Die Formel hat viele Nachteile:

1. μ und k sind praktisch annähernd gleich (wenn $\mu < 1$, so ist $\mu < k$; wenn $\mu > 1$, so ist $\mu > k$ und wenn $\mu = 1$, dann ist $\mu = k$).
2. μ und k unterscheiden sich nicht viel von 1, somit sind $1 - \mu^2$ und $1 - k^2$ kleine Zahlen mit großen relativen Fehlern.
3. Die graphische Ermittlung von k ist schwierig, denn es ist schwer auf der x -Achse und der y -Achse diejenigen Stellen zu finden, wo die Dichte gleich Null wird.
4. Ist $\mu = 1 = k$, so ist r unbestimmt.

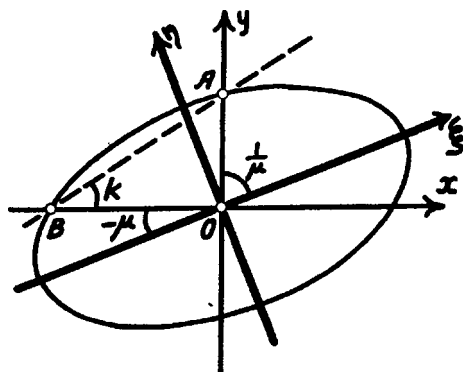


Fig. 2.

Da die Größe k mit den Achsen der Ellipse im Zusammenhang steht, so bringen wir deren Länge in die Gleichung hinein, da diese Achsen genauer bestimmbar sind.

Die Gleichung der Geraden OA ist $\eta = \frac{1}{\mu} \cdot \xi$ und diejenige der Geraden OB $\eta = -\mu \xi$. Indem wir das System dieser beiden Gleichungen und der Ellipsengleichung $b^2 \xi^2 + a^2 \eta^2 = a^2 b^2$ auflösen, erhalten wir die Koordinaten der Punkte A und B :

$$\xi_A^2 = \frac{a^2 b^2 \mu^2}{a^2 + b^2 \mu^2}, \eta_A^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 \mu^2}, \xi_B^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \mu^2 + b^2} \text{ und } \eta_B^2 = \frac{a^2 b^2 \mu^2}{a^2 \mu^2 + b^2};$$

$$\overline{OA^2} = \xi_A^2 + \eta_A^2 \text{ und } \overline{OB^2} = \xi_B^2 + \eta_B^2;$$

$$k^2 = \frac{\overline{OA^2}}{\overline{OB^2}} = \frac{a^2 \mu^2 + b^2}{a^2 + b^2 \mu^2};$$

wir setzen die erhaltenen Werte in den Ausdruck für r ein und erhalten

$$r = \frac{\mu(a^2 - b^2)}{\sqrt{(a^2 + b^2\mu^2)(a^2\mu^2 + b^2)}}.$$

Die Berechnungen erfolgen folgendermaßen: aus der Zeichnung bestimmen wir μ , a , b und führen die Berechnungen nach folgendem Schema durch:

| | | | | | |
|-------------|---------|-------------|------------------------|---------|-------|
| μ | μ^2 | $\mu^2 a^2$ | Beispiel: $\mu = 0.83$ | 0.688 | |
| a | a^2 | $\mu^2 b^2$ | $a = 17$ | 289 | 199 |
| b | b^2 | | $b = 8$ | 64 | 44 |
| $a^2 - b^2$ | | | | 225 | |

$$r = \frac{0.83 \cdot 225}{\sqrt{333.263}} = 0.63.$$

Bezeichnen wir

$$\frac{a}{b} \text{ mit } v, \text{ so ist } r = \frac{\mu(v^2 - 1)}{\sqrt{(v^2 + \mu^2)(v^2\mu^2 + 1)}}.$$

Für die praktische Berechnung von r kann man auf Grund der letzten Formel eine Tabelle zusammenstellen, so daß für jedes μ und v sofort der entsprechende Wert von r abzulesen ist. Die Tabelle kann auch durch ein Nomogramm ersetzt werden.

Dividieren wir den Zähler und den Nenner durch μ^2 und bezeichnen wir den reziproken Wert von μ durch $\frac{1}{\mu} = \mu'$, so erhalten wir:

$$r = \frac{\frac{1}{\mu}(v^2 - 1)}{\sqrt{(v^2 + \frac{1}{\mu^2})(\mu'^2 + 1)}} = \frac{\mu'^2(v^2 - 1)}{\sqrt{(v^2 + \mu'^2)(v^2\mu'^2 + 1)}};$$

somit ergibt jeder Wert von μ und sein reziproker Wert dasselbe r . Daher genügt es das Nomogramm nur für $\mu \leq 1$ zu zeichnen. Bei $\mu > 1$ kann man dann den reziproken Wert benutzen. Es ist vorteilhaft die μ -Achse logarithmisch zu wählen, denn in diesem Falle würden die μ - und auch die $\frac{1}{\mu}$ -Skalen zusammenfallen und immer denselben relativen Fehler liefern. Man kann auch die v -Achse logarithmisch wählen, denn die

relative Veränderlichkeit von ν ist wesentlichler als die absolute. So ruft eine Änderung des ν von 1.1 bis 1.6 (um 0.5) eine größere Änderung des r hervor, als die Veränderung von 8.5 bis 9.0. Auch erhalten die Kurven in der logarithmischen xy -Ebene eine kleinere Krümmung, während sie im gewöhnlichen Koordinatensystem stark gebogen sind.

Solch ein Nomogramm stellt Fig. 3 dar. Längs der μ -Achse (horizontale Achse) sind zu den μ -Werten noch die $\arctan \mu$ -Werte in Graden hinzugeschrieben, da der Winkel

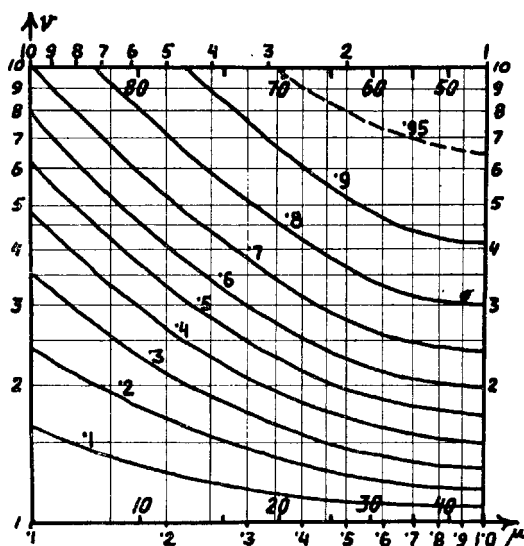


Fig. 3.

auch nach Graden gemessen werden kann. Die Werte $\frac{1}{\mu}$ sind am oberen Rande des Nomogramms eingetragen. Auf der Vertikalachse findet man die Werte von ν . Die Schnittpunkte der Parallelen zu den Achsen, durch die entsprechenden ν und μ gezogen, ergeben den Wert von r , den man nötigenfalls dem Augenmaß nach interpolieren kann.

Im folgenden betrachten wir die Methode des Abzählens der Punkte in den Quadranten. Zur Vereinfachung der Berechnungen wählen wir $\sigma_x = \sigma_y$, denn es ist bekannt, daß

1. der Korrelationskoeffizient von σ_x und σ_y nicht abhängt, und daß
2. die Zahl der Punkte von σ_x und σ_y nicht abhängt.

Bemerkung: Die Achsen sind durch die arithmetischen Mittelwerte von x und y gezogen und die Anzahl der Punkte entspricht den Bezeichnungen in Fig. 6. Die Fläche OBC (Fig. 4) enthält $\frac{1}{4} M_1$ Punkte, die Fläche OAB dagegen $\frac{1}{4} M_2$. Wir nehmen eine konzentrische Ellipse mit den Halbachsen $a + \Delta a$ und $b + \Delta b$ so, daß die Dichte der Punkte im schmalen Streifen konstant ist. Die Zahl der Punkte im Streifen $BB'CC'$ nennen wir m_1 , die in $AA'BB'$ nennen wir m_2 .

So ist

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{S_{BB'CC'}}{S_{AA'BB'}}.$$

Dasselbe können wir von jedem Differentialstreifen sagen. Und wenn wir sie alle addieren (bei stetigem Felde: integrieren), erhalten wir

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{S_{OBC}}{S_{OAB}}$$

$$S_{OAB} = S_{OABD} - S_{OBD}.$$

Die Fläche S_{OABD} erhalten wir durch Integration:

$$S_{OABD} = \frac{b}{a} \int_0^{\xi_0} \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi =$$

$$= \frac{b}{a} \left\{ \xi \sqrt{a^2 - \xi^2} \Big|_0^{\xi_0} - \int_0^{\xi_0} \sqrt{a^2 - \xi^2} d\xi + a^2 \arcsin \frac{\xi}{a} \Big|_0^{\xi_0} \right\}, \text{ oder}$$

$$2 S_{OABD} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} + ab \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ wenn wir statt } \xi_0 \text{ seinen}$$

Wert $\xi_0 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ einsetzen, welchen wir als die eine Koordinate des Schnittpunktes von OB ($\eta = \xi$) mit der Ellipse erhalten.

$$\text{woraus } \tan \varphi = r = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

Setzen wir hier den früher gefundenen Wert $\frac{b}{a}$ ein, so erhalten wir

$$r = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2(1+z)}}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{2(1+z)}}.$$

Beispiel: $M_1 = 162$ $M_2 = 68$ $z = 2.38$

$$\frac{\pi}{2(1+z)} = 25.6^\circ \quad \tan^2 25.6^\circ = 0.231.$$

$$r = 0.60$$

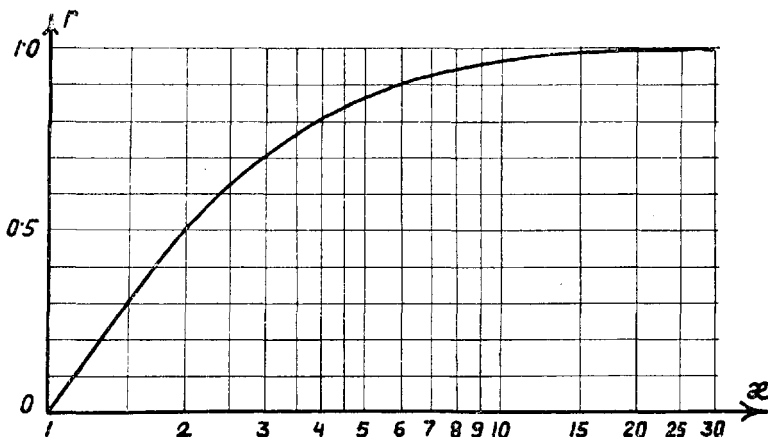


Fig. 5.

Mit Hilfe der Formel kann man eine Tabelle mit den einander zugeordneten Werten von z und r zusammenstellen (Tab. 1). Man kann auch den Zusammenhang in der Form einer Kurve darstellen (Fig. 5).

Tab. 1.

| | | | | | | | | | | | | | |
|-----|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| z | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 5.0 | 6.0 | 8.0 | 10.0 |
| r | 0 | 0.08 | 0.14 | 0.31 | 0.50 | 0.62 | 0.71 | 0.77 | 0.81 | 0.87 | 0.90 | 0.94 | 0.96 |

Falls man die Werte von z nicht berechnen will, kann man ein Nomogramm anfertigen, welches auf Grund von M_1

und M_2 die Ermittlung des r ermöglicht. Da $\kappa = \frac{M_1}{M_2}$, so ist $\log \kappa = \log M_1 - \log M_2$. Wählen wir ein logarithmisches Koordinatensystem, so erhalten wir für jedes κ , also auch für jedes r , eine Gerade. Alle Geraden sind untereinander parallel. Das betreffende Nomogramm finden wir in Fig. 6.

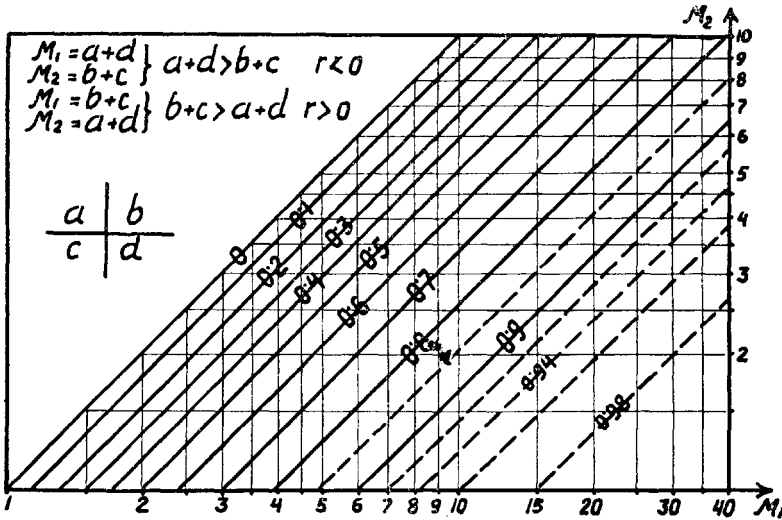


Fig. 6.

Somit wäre die Frage gelöst. Doch ist es oft praktisch, die letzten Gleichungen in einer anderen Form zu gebrauchen.

Den Winkel $\frac{\pi}{2(1+\kappa)}$ schreiben wir in der Form $\frac{2\pi M_2}{4(M_1 + M_2)}$; wir addieren und subtrahieren πM_1 und erhalten $\frac{\pi[M_1 + M_2 - (M_1 - M_2)]}{4(M_1 + M_2)}$; nennen wir $\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = \varrho$, so erhalten wir:

$$r = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{4} (1 - \varrho)}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} (1 - \varrho)}.$$

Im vorigen Beispiel wäre:

$$\varrho = \frac{162 - 68}{162 + 68} = 0.408$$

$$\frac{\pi}{4} (1 - 0.408) = 25.6^\circ, \\ r = 0.60$$

Was die erforderliche Rechenarbeit anbelangt, so stehen beide Formeln auf gleicher Stufe. Trotzdem scheint der Ausdruck mit q vorteilhafter zu sein, da $q \approx r$. Lösen wir die Gleichung in Bezug auf q auf, so erhalten wir:

$$q = 1 - \frac{4}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}.$$

Daraus ersieht man: wenn $r = 0$, so ist $q = 0$ und wenn $r = 1$, so ist $q = 1$; zwischen 0 und 1 ist $q < r$. Untersuchen wir die Differenz genauer, indem wir sie durch r ausdrücken.
 $r - q = y$,

$$y = r + \frac{\pi}{4} \arctan \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} - 1.$$

Wir suchen das Maximum

$$y' = 1 - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} = 0 \quad r^2 = 1 - \frac{4}{\pi} \quad r = 0.772$$

$$y'' = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{r}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}} < 0.$$

Beim Einsetzen des r -Wertes erhalten wir $y_{\max} = 0.211$. Damit $r - q = 0.211$, wenn $r = 0.772$, oder $q = 0.772 - 0.211 = 0.561$.

Zur Berechnung von r können wir folgende Formel benutzen: $r = q + y$,

$$y = \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{4} (1-q)}{1 + \tan^2 \frac{\pi}{4} (1-q)} - q \quad (\text{durch } q \text{ ausgedrückt}).$$

Zur Berechnung der y -Werte kann man sich einer Tabelle (Tab. 2) oder einer Kurve (Fig. 7) bedienen.

Tab. 2.

| q | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| y | 0.06 | 0.11 | 0.15 | 0.19 | 0.21 | 0.21 | 0.19 | 0.15 | 0.09 | 0.00 |

Untersuchen wir noch den Sinn von q im Korrelationsfelde.

Wir hatten $\frac{M_1}{M_2} = \frac{\pi - 2\theta}{2\theta}$, daraus ergibt sich:

$$\frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = \frac{\pi - 4\theta}{\pi} = q \quad \text{und} \quad \pi - 4\theta = \pi q.$$

Wir addieren und subtrahieren $2\theta_0$ und ordnen die Glieder, dann ist

$$\frac{1 + \varrho}{1 - \varrho} = \frac{\pi - 2\theta}{2\theta} = \frac{M_1}{M_2}.$$

Der letzte Ausdruck sagt uns folgendes: befindet sich

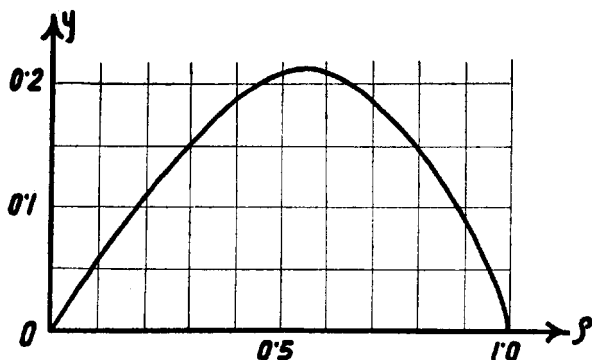


Fig. 7.

eine Masse M_1 in der Entfernung einer 1 oberhalb der x -Achse, eine andere M_2 in derselben Entfernung unterhalb derselben, so ist ϱ die Entfernung ihres gemeinsamen Schwerpunktes von der x -Achse. Denken wir uns alle Punkte eines jeden Quad-

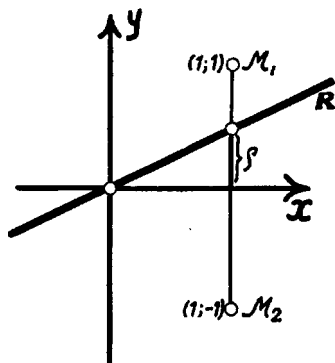


Fig. 8.

ranten des Feldes in einem Punkt konzentriert, dessen Koordinaten den absoluten Wert 1 haben (Fig. 8) (in diesem Falle ist $\sigma_x = \sigma_y = 1$), so ergibt ϱ das Steigungsmaß der gesuchten Regressionsgeraden, also den Korrelationskoeffizienten.

Daraus ist ersichtlich, daß $\varrho < r$, denn im M_1 -Felde hatten die Koordinaten der Punkte durchschnittlich größere absolute

Werte als im Felde M_2 , und das Reduzieren der Entfernungen auf ein und dieselbe Größe verkleinerte das Gewicht von M_1 und damit den Korrelationskoeffizienten.

Die auf die genannte Art definierten Größen q können wir auch aus der gewöhnlichen Formel erhalten:

$$r = \frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2 \cdot \sum y^2}} = \frac{2 \left[\sum_1^{M_1} 1 \cdot 1 + \sum_1^{M_2} 1 \cdot (-1) \right]}{2 \left[\sum_1^{M_1+M_2} 1 \cdot 1 \cdot \sum_1^{M_1+M_2} 1 \cdot 1 \right]} = \frac{M_1 - M_2}{M_1 + M_2} = q.$$

Die Berechnung führt zum selben Resultat.

Zusammenfassung.

Der Korrelationskoeffizient kann nach zwei vereinfachten Methoden berechnet werden:

- 1) durch Messung des Korrelationsfeldes,
- 2) durch das Abzählen der Punkte in den Quadranten.

Die Berechnungen können durchgeführt werden:

- 1) mit Hilfe der Formeln — analytisch,
- 2) mit Hilfe von Tabellen und
- 3) mit Hilfe von Nomogrammen.

Die letzte Art ist die einfachste und ergibt am schnellsten das gesuchte Resultat.

EINE NICTEUKLIDISCHE DEUTUNG DER RELATIVISTISCHEN WELT

VON

J. NUUT

TARTU 1935

Der grosse Fortschritt, den die Physik der Relativitätstheorie verdankt, beruht im wesentlichen auf einer Geometrisierung des vierdimensionalen weltgeschehens. Wo die klassische Physik zur „Erklärung“ der Phänomene gezwungen ist mit „Kräften“ mehr oder weniger willkürlichen Charakters zu operieren, genügt von einem höheren Standpunkte aus eine Deutung auf Grund gewisser geometrischer Eigenschaften einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Als äusserst fruchtbar erweist sich hierbei die Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine andere von höherer Dimensionszahl, — eine jedem Geometer wohlbekannte Tatsache.

Im nachfolgenden soll eine Deutung des relativistischen Weltbildes behandelt werden, die sich ergibt, wenn man als vierdimensionale Bezugsmannigfaltigkeit einen vierdimensionalen hyperbolischen (Lobatschewsky'schen) Raum wählt. Schon V. Varičak hat bemerkt, dass die Geschwindigkeiten gemäss der speziellen Relativitätstheorie sich wie gewisse Vektoren eines hyperbolischen Raumes addieren. Es stellt sich nun aber heraus, dass das Phänomen der Expansion des Weltalls damit in Zusammenhang gebracht und gewissermassen als eine folgerichtige Ergänzung der speziellen Relativitätstheorie aufgefasst werden kann. Zugleich ordnet sich auch die Gravitation in die benutzte Deutung ein. Im Interesse der Anschaulichkeit soll bei all dem zunächst der Weltraum als zweidimensional angesehen werden, dabei beständig als im grossen euklidisch. Der Übergang zum dreidimensionalen euklidischen Weltraum bietet dann nur der Anschauung Schwierigkeiten, vollzieht sich aber formal ohne Komplikationen.

Es erscheint zunächst verlockend, die Bewegung von Massenpunkten in einem zweidimensionalen im grossen euklidischen Raum E'_2 vom Standpunkt eines aussenstehenden dreidimensionalen Beobachters, der einem den E'_2 enthaltenden streng euklidischen E_3 angehört, folgendermassen zu deuten:

Eine unendliche Ebene E'_2 mit gewissen an den Gummi erinnernden elastischen Eigenschaften, jedoch ohne Schwere, befindet sich in einem homogenen Schwerfeld senkrecht zu den Kraftlinien dieses Feldes. Diese Ebene markiert eine Niveaufläche des genannten Schwerfeldes. Sind dann auf diese Gummifläche gewisse schwere Massenpunkte verteilt, die sich reibungslos auf der Fläche unter dem Einfluss des Schwerfeldes bewegen können, so werden zunächst in der Nachbarschaft dieser Massenpunkte Einbuchtungen (mit Krümmung verknüpfte Dehnungen) auf der Fläche entstehen, was dann, dank dem Schwerfelde, eine relative Bewegung der Massenpunkte längs der nun nicht mehr genau euklidischen Gummifläche zur Folge haben wird. Diese Bewegungen werden von einem dem E'_2 selbst angehörigen Beobachter dahin gedeutet werden können, dass die Massenpunkte sich gegenseitig anziehen, m. a. W., der Beobachter wird in seinem Raume E'_2 die Wirkungen eines zweidimensionalen Gravitationsfeldes konstatieren. Unter gewissen Voraussetzungen über die Elastizität der tragenden Fläche dürfte eine genügende Annäherung an das Newton'sche Anziehungsgesetz erreichbar sein, wenigstens solange man in gewissen Schranken verbleibt.

Nun wird aber zugleich die Gummifläche E'_2 von den auf sie drückenden Massenpunkten in der Richtung des Schwerfeldes im E_3 mitbewegt werden, wobei sie dieser Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, da sie ja selbst schwerefrei sein soll. Dieser Gesamtbewegung der Fläche E'_2 entspricht eine Verschiebung der Niveauebene des dreidimensionalen Schwerfeldes. Der mitgeführte zweidimensionale Beobachter wird die Geschwindigkeitsänderung dieser Verschiebung zu den Bewegungserscheinungen der Massen im E'_2 in Beziehung setzen können. Er kann einen Parameter, genannt „Zeit“, einführen, dessen Zuwachs dt proportional ist dem Geschwindigkeitszuwachs dv der „fallenden“ Niveaufläche, die übrigens, infolge der lokalen Krümmungen, diesen Namen nicht mehr mit mathematischer Strenge beanspruchen darf. Auf diesen Parameter t kann der Beobachter dann die Kinematik seines E'_2 beziehen. In jedem einzelnen Massenpunkt ist der zugehörige Beobachter berechtigt, gerade sein Niveau als das normale anzusehen und den Zuwachs der Fallgeschwindigkeit gerade seines Massenpunktes zur Zeitmessung zu verwenden, auch darf er annehmen, dass gerade

sein Massenpunkt sich nur in der Richtung der Schwerelinien des E_3 verschiebt, auf dem E'_2 aber in Ruhe verweilt. Jeder Beobachter wird also seine eigene Raum- und Zeitrechnung anwenden können; zu bemerken wäre, dass letztere u. a. von der lokalen Krümmung des E'_2 beeinflusst wird.

Ein Massenpunkt wird auf die Gummifläche einen zusätzlichen Druck ausüben, d. h. eine lokale Krümmungsänderung bewirken, sobald man annimmt, dass er eine momentane Geschwindigkeit hat, die nicht in der Richtung des dreidimensionalen Gravitationsfeldes liegt; m. a. W, die als Masse beurteilte Grösse (die Ursache der Krümmung) wird mit wachsender relativer Geschwindigkeit wachsen.

Konkret denkende zweidimensionale Physiker werden die Gummifläche als Äther bezeichnen, obgleich sie ihn nicht materiell erfassen können, da er vom dreidimensionalen Schwerfeld nicht direkt beeinflusst wird und sich dadurch von der Materie der beobachtbaren Massenpunkte wesentlich unterscheidet. Zu abstrakterem Denken neigende zweidimensionale Mathematiker werden diesen Äther als überflüssig ablehnen und vom stellenweise gekrümmten Raum E'_2 schlechtweg reden. Jede Störung oder Krümmungsänderung an irgendeiner Stelle der Gummifläche wird sich in diesem E'_2 auf kürzesten Wegen ausbreiten; die geodätischen Linien, die den Ausbreitungsweg vorschreiben, werden durch lokale Krümmungen (Massennähe) in dem von Einstein geforderten Sinne abgelenkt werden.

So verführerisch solch ein Bild auch ist, verbleiben doch folgende Unzuträglichkeiten mit unserem derzeitigen Weltbild:

1) Es sind zusätzliche Hypothesen etwa vom Charakter der Lorentz'schen Kontraktionshypothese erforderlich, um die Konstanz der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Störungen im E'_2 für dort relativ bewegte Beobachter zu sichern.

2) Das Phänomen der grossen positiven Radialgeschwindigkeiten entfernter Nebelgebilde (die sogenannte Expansion des Weltalls) wird von dem Bilde nicht erfasst.

Beide hier genannten Schwierigkeiten verschwinden, wenn man sich den dreidimensionalen Aussenbeobachter als in einem hyperbolischen Raum L_3 befindlich, das homogene Schwerfeld durch Schwerelinien, die ein Bündel Lobatschewsky'scher Parallelen im L_3 bilden, ersetzt, und die Gummifläche als eine zu diesem Parallelenbündel gehörige Lobatschewsky'sche

Grenzkugel (Sphäre mit unendlich grossem Radius und Mittelpunkt im gemeinsamen Schnittpunkt der Parallelen) denkt. Allerdings wird hierbei aus später zu nennenden Gründen eine konstante Fallgeschwindigkeit dieser Grenzkugel im L_3 postuliert werden müssen. Zur besseren Übersicht erinnere ich an folgende bekannte Tatsachen:

Nach Cayley-Klein ist die hyperbolische (Lobatschewsky'sche) Geometrie gleichbedeutend mit einer Metrik, bei der die unendlich-fernen Elemente durch eine feste Fläche zweiter Ordnung, die man stets als Kugelfläche annehmen darf, gegeben sind. Schreibt man ihre Gleichung in homogenen Koordinaten in der Gestalt

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (1)$$

so bedeutet c den Radius dieser Kugelfläche. Geht man zu unhomogenen Koordinaten v_x, v_y, v_z über, wo

$$v_x = \frac{x}{t}, \quad v_y = \frac{y}{t}, \quad v_z = \frac{z}{t},$$

so wird diese Gleichung

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 - c^2 = 0. \quad (2)$$

Interpretiert man hierauf v_x, v_y, v_z als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes P , so sind die rechtwinkligen Projektionen des Vektors OP , dessen Länge r ist (wobei O den Koordinatenanfang bezeichnet), durch

$$v_x = c \operatorname{th} \frac{r_x}{c}, \quad v_y = c \operatorname{th} \frac{r_y}{c}, \quad v_z = c \operatorname{th} \frac{r_z}{c} \quad (3)$$

bestimmt; hierin bedeuten r_x, r_y, r_z die mit Vorzeichen versehenen Längen der Projektionen von r , das Symbol th den Hyperbeltangens. Die Länge r selbst ist dann durch

$$c^2 \operatorname{th}^2 \frac{r}{c} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (4)$$

gegeben. Bezeichnet man $c \operatorname{th} \frac{r}{c}$ mit v , so ist also

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \quad (5)$$

Die geometrische Summe zweier Vektoren OP, OQ ist mittels der Koordinaten von P und Q als ein neuer Vektor OR wohl-

bestimmt, sobald man die Reihenfolge, in der die Addition auszuführen ist, kennt. Auf die entsprechenden Formeln, die sich übrigens aus denen der sphärischen Trigonometrie auf bekannte Weise ergeben, brauche ich nicht näher einzugehen. Ich begnüge mich mit dem Hinweis, dass die Vektoraddition sich auf gewisse Verrückungen und Drehungen der Koordinatenachsen reduzieren lässt, analytisch dadurch definiert, dass diese Koordinatentransformationen eine Gruppe linearer gebrochener Substitutionen bilden, denen gegenüber die quadratische Form (2) sich invariant verhält. Aus diesem Umstand folgt sofort, dass die solchermassen bestimmte Vektoraddition wesentlich identisch ist mit der Addition der Geschwindigkeiten nach der speziellen Relativitätstheorie, wenn v , v_x , v_y , v_z gewisse Geschwindigkeiten, resp. ihre Projektionen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz bedeuten, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Man braucht demnach bloss die in (2) eingehende Grösse c als Lichtgeschwindigkeit zu deuten, um eine ein-eindeutige Beziehung zwischen Vektoradditionen im L_3 und Geschwindigkeitsadditionen nach Einstein zu fixieren. Varičak hat die rechnerischen Einzelheiten seinerzeit durchgeführt, ohne auf den tieferen Grund hinzuweisen. Jeder Strecke $OP=r$ des L_3 entspricht eine in Richtung und Grösse durch (3) und

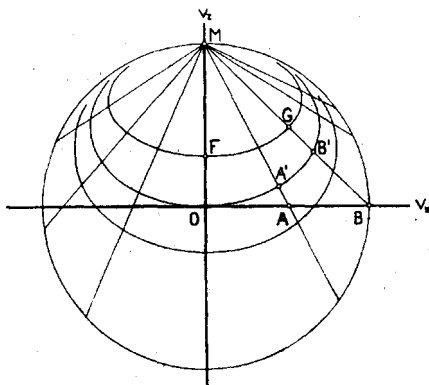
$$v = c \operatorname{th} \frac{r}{c} \quad (6)$$

definierte Geschwindigkeit v . Hierbei wäre noch zu berücksichtigen, dass es nur einer nichteuklidischen Bewegungstransformation im L_3 bedarf, um einen beliebigen Punkt in den Koordinatenanfang O zu bringen. Die mit der Strecke OP konjugierte Geschwindigkeit kann hiernach an der Klein'schen Kugel direkt mit dem Zirkel in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit gemessen werden, sobald man den Radius dieser Kugel zur Einheit nimmt.

Nun ist es aber möglich, die der Länge OP entsprechende Geschwindigkeit im L_3 selbst durch eine gewisse Länge zu messen. Es existiert nämlich im L_3 eine Fläche (zweiter Ordnung) mit der bemerkenswerten Eigenschaft, dass die auf dem Netz ihrer geodätischen Linien entwickelte Geometrie genau die euklidische ist. Man erhält diese Fläche, die Grenzkugel, als Fläche, die jede Gerade eines Parallelenbündels im L_3 rechtwinklig schneidet. Die Grenzkugel liegt symmetrisch in bezug

auf jede der zu ihr konjugierten Parallelen und hat u. a. noch die wichtige Eigenschaft, dass jede von ihr konstanten Abstand zeigende Fläche wiederum eine Grenzkugel für dasselbe Parallelenbündel darstellt. Zwei Grenzkugeln sind stets kongruent, jedoch entsprechen sich in dieser Kongruenz durchaus nicht etwa die auf ein und derselben Parallelgeraden zu liegen kommenden Punkte. Die Schnittpunkte zweier Parallelen des Bündels mit der Grenzkugel entfernen sich voneinander, wenn die Grenzkugel vom unendlich fernen Scheitelpunkt des Parallelenbündels abrückt. Das System der Niveauflächen eines Parallelenbündels im L_3 besteht aus Grenzkugeln. Wird eine Gummi- fläche E'_2 von der Gestalt der Grenzkugel von Massenpunkten mitgeführt, die einem Schwerfeld folgen, dessen Kraftlinien das zugehörige Lobatschewsky'sche Parallelenbündel bilden, so werden diejenigen Massenpunkte, die sich so weit voneinander entfernt befinden, dass sie nicht durch die gegenseitig bedingten Einbuchtungen der Niveaufläche von der Parallelenrichtung abgelenkt werden, den Linien des Schwerfeldes im L_3 folgend, sich nach und nach unbeschränkt voneinander entfernen. Dieses zweidimensionale Weltall wird also das Phänomen der Expansion zeigen, dabei aber für sich allein betrachtet im grossen (d. h. bis auf lokale Krümmungen) alle Eigenschaften eines euklidischen Raumes aufweisen.

Die beistehende Figur zeigt einen Zentralschnitt $v_y = 0$ der Klein'schen Kugel, mehrere Parallelen eines Bündels mit dem Scheitel M und mehrere durch zugehörige Grenzkugeln erzeugte



Schnittkurven (Grenzkreise) FG , $OA'B'$ usw. Infolge der Kongruenz der Grenzkugeln bedeutet es keine Einschränkung der

Allgemeinheit, wenn man sich auf den durch O gehenden Grenzkreis $OA'B'$ konzentriert. Die Gleichung des durch den Punkt F mit den Koordinaten 0 und ξ gehenden Grenzkreises FG lautet

$$(c - \xi) v_x^2 + 2cv_x^2 - 2c(c + \xi) v_x + 2c^2\xi = 0, \quad (7)$$

also die Gleichung des Grenzkreises $OA'B'$, wo $\xi = 0$ ist:

$$v_x^2 + 2v_x^2 - 2cv_x = 0. \quad (8)$$

Für die Länge ds eines Bogenelements im zugehörigen L_3 gilt, wenn wie in unserem Falle $dv_y = 0$ angenommen ist,

$$ds^2 = c^2 \frac{(v_x dv_x + v_z dv_z)^2 - (v_x^2 + v_z^2 - c^2)(dv_x^2 + dv_z^2)}{(v_x^2 + v_z^2 - c^2)^2}. \quad (9)$$

Hat der Punkt A in der Figur die Koordinaten v und 0 , so folgt aus (8) und (9) für die Länge s des Grenzkreisbogens OA' :

$$s = v. \quad (10)$$

Dies bezeugt, dass ein zweidimensionaler Beobachter auf der Grenzkugel in O eine in der Tangentialrichtung seines E'_2 durch einen Vektor OA gegebene Geschwindigkeit v auffassen darf als Strecke, die in der Zeiteinheit auf einer durch O gehenden geodätischen Linie zurückgelegt werden kann. Für den aussenstehenden dreidimensionalen Beobachter ist der Grenzkreisbogen $OA' = s$ natürlich länger, als die geradlinige Entfernung $OA' = r$, was aus der nach (9) sich ergebenden Relation

$$\operatorname{ch} \frac{r}{c} = 1 + \frac{s^2}{2c^2} \quad (11)$$

sofort ersichtlich wird.

Geht der Punkt A nach B , so wird $v = c$ (Lichtgeschwindigkeit). Die Einstein'sche Addition der Geschwindigkeiten (solange die lokale Krümmung des E'_2 vernachlässigt werden kann) überträgt sich auf die Grenzkugel, d. h. auf den E'_2 , der aber selbst euklidisch ist. Es gilt also in diesem E'_2 , wenn man die Geschwindigkeit als einen Grundbegriff auffasst, die Kinetik der speziellen Relativitätstheorie, solange keine durch Massen bedingte Krümmungen störend einwirken. Es ist dies eine Folge dessen, dass der euklidische E'_2 in einen nichteuklidischen L_3 eingebettet wurde. Die oben erwähnte erste Schwierigkeit ist damit beseitigt.

Es ist prinzipiell möglich, den Parameter „Zeit“ aus der Kinematik wenigstens formal zu eliminieren, indem man postuliert, dass der Begriff der Entfernung einen wohldefinierten eindeutigen Sinn haben soll. Geschwindigkeiten können dann stets auf der Skala eines Spektroskopes durch Strecken gemessen werden, was nicht notwendig eine explizite Zeitmessung voraussetzt. Damit steht im Einklang, dass die Lorentztransformation sehr wohl als Geschwindigkeitstransformation (unhomogener Koordinaten) und nicht notwendig als Transformation von Raum und Zeit (homogene Koordinaten) aufgefasst werden kann. Der Parameter „Zeit“ würde bei einer solchen Darstellung eine abgeleitete Grösse bedeuten, was er ja auch eigentlich tatsächlich ist. Da eine solche Kinematik aber den Gepflogenheiten widerspricht, so erscheint es natürlicher, ein Zeitdifferential dt explizite einzuführen.

Wenn man dieses dt wie vorhin proportional der Geschwindigkeitsänderung der Niveaufläche ansetzte, so würde der Verlauf der Prozesse nach t wesentlich von der Geschwindigkeit der Niveaufläche in einem Anfangsmoment $t = 0$ abhängen. Es ist dies eine Folge der Einstein'schen Geschwindigkeitsaddition, resp. der Eigenschaften der nichteuklidischen Strecken. Umgekehrt würden dann Beobachtungen im E'_2 einen Rückschluss auf die Geschwindigkeit der Niveaufläche gestatten. Soll derartiges aus begreiflichen Gründen vermieden werden, so ist man gezwungen die Bewegung der Niveaufläche im L_3 als gleichförmig anzusehen, d. h. ihre Geschwindigkeitsänderung ständig gleich 0 anzunehmen. Man hat sich dabei das Bild so zu denken, dass die Bewegung der Niveaufläche sofort aufhören würde, wenn der Druck der Massenpunkte plötzlich aufhörte; es wäre also sozusagen der Bewegung der Niveaufläche ein starker „Reibungswiderstand“ entgegengesetzt und dadurch der stationäre Zustand gleichförmiger Geschwindigkeit trotz beständig einwirkender Kräfte erzielt.

Bei einer gleichförmigen Verschiebung der Niveaufläche wird man im E'_2 den Zuwachs des Zeitparameters dt als proportional der Grösse der Verschiebung dq in der Normalenrichtung ansetzen. Dass diese „absolute“ Verschiebung im E'_2 bemerkbar wird (und zwar als Expansion), ist eine charakteristische geometrische Eigenschaft des L_3 ; im E_3 wäre dies für eine Niveauebene E'_2 nicht der Fall.

Verschiebt sich die Grenzkugel E'_2 um ein dq in der Normalenrichtung, so wächst die Länge s des Grenzkreisbogens OA zwischen zwei konstanten Parallelen um ein ds , das sich aus

$$-\frac{ds}{dq} = \frac{s}{c} \quad (12)$$

bestimmt. Eine solche Verschiebung der als starre Fläche gedachten Grenzkugel ist u. a. dadurch wesentlich verschieden von einer Verschiebung starrer Körper im E_3 , dass höchstens ein Punkt eine Gerade beschreiben kann; alle übrigen Punkte der Fläche beschreiben dann sicher krumme Linien (Abstandslinien). In dieser Eigentümlichkeit der starren Bewegung einer Fläche im L_3 dürfte ein Ansatz für den oben erwähnten Reibungswiderstand zu finden sein, doch soll hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

Nimmt man in (12) $-dq$ als proportional dem Zeitdifferential dt an, setzt also $-dq = \gamma \cdot dt$, wo γ eine Konstante bedeutet, so bilden die Lagen der Grenzkugel nach jeweils gleichen Zeitintervallen dt ein System äquidistanter Niveauflächen des Schwerfeldes im L_3 . Die Derivierte $\frac{ds}{dt}$ entspricht dann im E'_2 einer relativen Radialgeschwindigkeit der in O und A den Schwerelinien folgenden Massenpunkte. Der E'_2 selbst, d. h. eigentlich das ihm von einem Beobachter aufgeprägte Koordinatennetz, ändert sich nicht, da der E'_2 beständig sich selbst kongruent verbleibt.

Es ist in Übereinstimmung mit dem zur Zeit vorliegenden Beobachtungsmaterial diese relative Radialgeschwindigkeit der Massen im E'_2 nach (12) proportional ihrer jeweiligen Entfernung s :

$$\frac{ds}{dt} = \gamma \frac{s}{c} \quad (13)$$

Durch Integration ergibt sich für einen endlichen Zuwachs Δs entsprechend einem endlichen Δt :

$$\log \left(1 + \frac{\Delta s}{s} \right) = \frac{\gamma}{c} \cdot \Delta t. \quad (14)$$

Für $\Delta t = 1$ sec ergibt das Beobachtungsmaterial $\frac{\Delta s}{s} = 1,6 \cdot 10^{-17}$, woraus sich für das diesem Δt entsprechende $-\Delta q$ findet:

$$-\Delta q = 5 \cdot 10^{-7} \text{ cm.} \quad (15)$$

Die Verschiebung der Niveauläche um 1 cm erfolgt also in ca. 2 Millionen Sekunden, d. h. ungefähr in 23 Tagen. Nimmt man an, dass diese Expansion sich auch im Planetensystem bemerkbar macht, so müsste man demnach immerhin ungefähr 10 000 Jahre warten, bevor der scheinbare Sonnendurchmesser sich für uns um 0,01 Bogensekunden verringert, vorausgesetzt natürlich, dass dieser Durchmesser selbst an der Expansion nicht teilnimmt, also in Einheiten c ungeändert bleibt. Die relativen Dimensionen der Planetenbahnen würden dabei ungeändert bleiben, da die Expansion bloss eine Ähnlichkeitstransformation im E'_2 bedeutet. Die Umlaufzeiten werden wachsen, u. zw. die Länge des Erdenjahres um ca. 4 Minuten in 10 000 Jahren.

Infolge der so gedeuteten Expansionserscheinung werden unsere Vorstellungen über relative Bewegung im E'_2 einer Korrektur bedürfen. Man wird dort nämlich nur dann von relativer Bewegung im eigentlichen Sinne sprechen können, wenn nicht beide Massenpunkte gleichzeitig genau den Schwerelinien folgen. Damit steht im Einklang, dass der Beobachter im Massenpunkt O und derjenige im Massenpunkt

A' identisches Zeitmass $— \frac{1}{\gamma} \cdot dq$ werden verwenden können,

ohne in Widersprüche verwickelt zu werden, sofern die längs dem Grenzkreis gemessene Entfernung OA' beider Punkte sich genau nach dem Expansionsgesetz (14) ändert. Ist solches aber nicht der Fall, so wird der sich als in Ruhe befindlich (d. h. beständig auf der Schwerelinie) denkende Beobachter dem Punkte A' eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente im E'_2 zuschreiben und umgekehrt; entsprechend dieser zusätzlichen Komponente wird eine wechselseitige Korrektur der Zeit- und Längenschätzung nach Einstein'schen Prinzipien ausgeführt werden müssen, um die Möglichkeit einer Bestimmung der absoluten Bewegungen längs der Fläche E'_2 auszuschalten. Diese zusätzliche Komponente allein kommt als eigentliche relative Geschwindigkeit im Sinne der Kinematik der speziellen Relativitätstheorie in Betracht, auf sie allein bezieht sich c als Höchstwert. Die Expansionsgeschwindigkeit im E'_2 ist sozusagen nicht mehr mechanischer, sondern geometrischer Natur und wird bei genügend grossem s den Wert c beliebig übersteigen. Trotz ihres rein geometrischen Charakters ist sie für Werte unterhalb c mit dem Spektroskop messbar, da ihr eine Ver-

längerung des Weges des Lichtstrahles $A'O$ im E'_2 entspricht; sie bedeutet aber keine Differenz der kinetischen Energie bei der Massenpunkte im E'_2 . Das klassische Trägheitsgesetz ist nur in erster Annäherung für „kleine“ Gebiete gültig.

Im L_3 in gerader Richtung gemessen beträgt der Zuwachs dr der Distanz OA'

$$dr = \frac{-2 \, dq}{\sqrt{1 + 4 \, c^2 \, s^{-2}}}, \quad (16)$$

was bei unendlich wachsendem s beständig absolut wachsend dem Grenzwert $-2 \, dq$ zustrebt. Ob hinter diesem r eine physikalische Realität steckt, bleibt eine offene Frage.

Die Expansion des Weltalls wird durch die angewandte Deutung so tiefgreifend erfasst, dass man wohl mit Recht behaupten darf, diese Expansion sei eine konsequente Ergänzung zur geforderten Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Ich möchte zusammenfassend auf folgendes aufmerksam machen:

1) Die Expansion des Weltalls lässt sich folgerichtig als Expansion der Massenverteilung deuten. Man bedarf keiner mystisch anmutenden Raumexpansion, etwa im Sinne einer veränderlichen Raumkrümmung. Die Expansion wird bemerkbar, obgleich sie eine Ähnlichkeitstransformation bedeutet: sie wird bemerkbar, weil die Strecke c , die den L_3 definiert, sich nicht ändert.

2) Man bedarf keiner im E'_2 wirkenden „Kräfte“, um die Expansion zu deuten; das Schwerfeld im L_3 ergibt keine Tangentialkomponente auf der Grenzkugel. Die Expansion bedeutet keinen Zuwachs an kinetischer Energie, da der Druck der Massenpunkte an den einzelnen Stellen der Grenzkugel sich trotz der Radialgeschwindigkeit nicht ändert.

3) Die Expansion bewirkt eine ständige Abnahme der auf ein beliebiges Raumstück kommenden mittleren Massendichte. Das Weltall muss sich asymptotisch einem Zustand nähern, bei dem sämtliche Massenteilchen so isoliert sind, dass Lichtsignale von einem zum anderen nicht übermittelt werden können. Man könnte von einem „Lichttod“ sprechen.

4) Man bedarf keiner ausgezeichneten Phase in der Massenverteilung des Weltalls. Die Dichte der Massenverteilung zeigt weder extremale, noch Anfangs- oder Endwerte, sondern bloss ständige Abnahme.

5) Die Gravitationserscheinungen im E'_2 tragen im Vergleich zur Expansion bloss den Charakter lokaler Störungen der sonst im L_3 gleichmässigen Krümmung der Grenzkugel. Die Geringfügigkeit dieser Störungen wird durch die Kleinheit der Ablenkung der Lichtstrahlen im Gravitationsfeld der Sonne bezeugt. Bildlich gesprochen, verhält sich die Gravitation zur Expansion ungefähr so, wie die Störungen der Planetenbahnen zu den Kepler'schen Gesetzen.

6) Ein euklidischer Raum E'_2 widerspricht nicht den Grundprinzipien der Relativitätstheorie, wenigstens dann nicht, wenn eine die Expansion berücksichtigende Korrektur vorgenommen wird. Ohne eine solche Korrektur dürfte die Relativitätstheorie in ihrer nun klassisch gewordenen Form bloss auf „kleine“ Gebiete anwendbar sein.

7) Die Mechanik im E'_2 lässt sich auf das Studium einer quadratischen Differentialform zurückführen, deren invariante Bedeutung darin liegt, dass sie die von einem Massenpunkt im L_3 beschriebene Weltlinie definiert.

8) Bei eigentlicher relativer Bewegung im E'_2 werden sich Korrekturen in Zeit- und Längenmass aufzwingen. Es entspricht dies formal einer gewissen Korrektur des in der Normalenrichtung gemessenen — dq .

Eine Erweiterung der oben angedeuteten Betrachtungen auf den tatsächlichen Fall eines dreidimensionalen Weltraums begegnet formal keinen Schwierigkeiten; allerdings geht die Anschaulichkeit des Bildes dann verloren. In einem vierdimensionalen hyperbolischen Raum L_4 sei ein durch hyperbolische Parallelen definiertes Schwerefeld gegeben; das dreidimensionale Gebilde E'_3 , das sämtliche Parallelen des Feldes orthogonal schneidet, ist dann in sich euklidisch. Es werde von Massenpunkten mitgeführt, die im erwähnten vierdimensionalen

Schwerefelder „fallen“. In den Umgebungen derjenigen Stellen des E'_3 , wo die Massenpunkte auf den E'_3 „drücken“, entstehen Dehnungen und Spannungen, die geometrisch einer „Krümmung“ des E'_3 in der betreffenden Gegend gleichbedeutend sind, und gegenseitige Gravitationserscheinungen der Massen im E'_3 bewirken. Im grossen wird aber während des „Fallens“ eine durch die Divergenz des vierdimensionalen Schwerfeldes bedingte Expansionserscheinung sich Geltung verschaffen. Gravitation bedeutet für das Universum bloss eine lokale Störung der Expansion.

Tartu, April 1935.

AUS DEM PFLANZENPHYSIOLOGISCHEN LABORATORIUM DES BOTANISCHEN INSTITUTS DER UNIVERSITÄT TARTU, ESTLAND

**DAS VERHALTEN DER EIWEISSSTOFFE
GESUNDER UND ABBAUKRANKER KARTOFFEL-
KNOLLEN GEGEN SALZE**

VON

HUGO KAHO

TARTU 1935

Einleitung.

Bekanntlich enthalten die Zellen des Reservegewebes der Kartoffelknollen außer der überwiegenden Menge von Kohlehydraten auch etwas Eiweißstoffe. Die letzteren sind im Zellsaft gelöst und bestehen hauptsächlich aus Tuberin, einem Pflanzenglobulin.

Die Struktur der Biokolloide bestimmt das physiologische Verhalten einer Pflanze gegen die Außenwelt und bildet die Grundlage für den normalen Stoffwechsel. So hat der Verfasser gefunden¹⁾, daß das Protoplasma abbaukranker Kartoffelknollen eine größere Permeabilität für Wasser und für die im Zellsaft gelösten Stoffe aufweist, als das Plasma gesunder Knollen. Aus Abbauknollen hervorgegangene Kartoffelpflanzen sind aus Zellen aufgebaut, die eine abnorme Permeabilität besitzen. Eine normale Entwicklung (Wasserhaushalt, Stoffwechsel) solcher Pflanzen ist nur unter ganz speziellen Außenbedingungen möglich, welche nicht immer vorhanden sind.

Vermutlich liegt der Grund der anormalen Permeabilität in einer (ob reversiblen?) Veränderung der Feinstruktur der Biokolloide des Protoplasmas, deren Kolloidzustandes. Da der Kolloidzustand des Eiweißes eines Organismus oft charakteristisch für die physiologischen Vorgänge in ihm ist, so entstand bei mir die Frage, ob beim Reserveeiweiß der Abbauknollen, im Vergleich mit dem der Vitalknollen, gewisse bemerkbare Abweichungen im Verhalten gegen Neutralsalze nachzuweisen seien.

Das Reserveeiweiß der Kartoffel, von Osborne und Campbell²⁾ Tuberin genannt, bildet das Hauptprotein der Knollen. Es ist zum größten Teil im Zellsaft in Gegenwart von geringen Salzmen gen gelöst. Sjollem a und Rinkes konnten bei der Hydrolyse die Mehrzahl der allgemein auftretenden

1) K a h o, H., Zur Physiologie der Kartoffel I. Über die Permeabilität des Knollengewebes der vitalen und abbaukranken Kartoffeln. *Phytopathologische Zeitschr.* 8, 1935.

2) Zit. nach Czapek (1925).

Aminosäuren bei Tuberin nachweisen (Trier 1924). Den Daten von Hungerbühler¹⁾ nach enthalten Knollen 18,83% an Trockensubstanz (in Prozenten des Frischgewichts), und hiervon Eiweiß — N 0,904%²⁾.

Versuche.

Versetzt man den Preßsaft einer Kartoffelknolle mit etwas Wasser, so erhält man nach Abfiltrieren eine kolloide Flüssigkeit, die Proteinstoffe des Zellsaftes der Knollenzellen gelöst enthält, während die Eiweißkomponenten des Protoplasmas in Wasser unlöslich sind (Lepeschkin 1923, 1924, 1926).

Bei der chemischen Analyse des Protoplasmas von *Fuligo varians* sagt Lepeschkin (1923): „Die wasserlöslichen Stoffe des Plasmodiums befinden sich hauptsächlich in Vakuolen und teilweise auch im Protoplasmawasser gelöst; sie hatten für mich eine untergeordnete Bedeutung, weil mich die Zusammensetzung der Grundmasse des Protoplasmas interessierte, welche in Wasser unlöslich ist und welche als alleiniger Sitz der Lebensfähigkeit betrachtet werden kann“.

Der abfiltrierte Preßsaft gibt alle üblichen Eiweiß-Farbenreaktionen, wie die Biuret'sche, die Millon'sche, die Xanthoprotein- und die Schwefelbleireaktion³⁾. Die Flüssigkeit enthält keine Stärke, die Jodprobe fällt negativ aus. Außer dem Eiweiß enthält die Preßsaftlösung noch eine leicht nachweisbare Menge von reduzierenden Zuckern. Erwärmt man den Auszug bis ca. 70°, so wird das Eiweiß in der Regel ausgeflockt, es bildet sich ein starker grobflockiger Niederschlag.

Obgleich wir es mit einem Gemisch von verschiedenen Stoffen zu tun haben, scheint in diesem das Verhalten des Tuberins gegen Salze den Ausschlag zu geben. Die in sehr kleinen Mengen vorhandenen Begleitstoffe sind in allen Versuchen annähernd dieselben. Die Versuche ergaben auch mit denselben Kartoffelsorten immer dieselben Resultate, während sie bei verschiedenen Sorten etwas verschieden ausfielen (vgl. die Koagulationstemperaturen auf Seite 11 und 12).

1) Zit. nach Czapek (1925).

2) Mittelwerte aus 3 Analysen: vom 23. und 30. Juni und vom 30. Juli.

3) Die älteren Beobachtungen von Hartig und Sachs hatten bereits ergeben, daß das Zytoplasma die gewöhnlichen Eiweißreaktionen nicht direkt zu geben pflegt (Czapek 1925).

Meine Absicht war das Kartoffeleiweiß bei gesunden und abbaukranken Knollen in nativem Zustande zu untersuchen. Für diesen Zweck war es aber schwer das Eiweiß in reinem Zustande zu gewinnen, da es bei der Einwirkung der gebräuchlichen Reagenzien seine kolloiden Eigenschaften veränderte.

Da bei den Versuchen ziemlich hohe Konzentrationen der Salze (0,5—1,0 n.) in Betracht kamen, war es sicher, daß das Verhalten des Eiweißes durch Beimengungen wie Zucker, Solanin und andere organische Stoffe des Zellsaftes nicht merklich beeinflußt wurde.

Zu den Versuchen wurden mit einem Hornmesser geschälte und gewogene Knollenstücke¹⁾ (15—30 g aus einer Knolle) auf einer Aluminiumreibe zerrieben, worauf der Gewebebrei, mit dem gleichen Quantum Wasser versetzt, in einem Porzellanmörser gut durchgerieben und filtriert wurde. Zu den Versuchen diente das Filtrat.

Das Aussalzen des Eiweißes. ($t^0 = 20.$)

Versuch 1. „Allerfrüheste Gelbe“ (gesund).

Knollengewichte 92 g und 50 g, Salze in substantia bis 6 norm. bzw., je nach der Löslichkeit, bis zur Sättigung der Lösung.

| | KJ | KCl | KCNS | KNO ₃ ²⁾ | K ₂ SO ₄ ²⁾ |
|------------------|-----------------|------|------|--------------------------------|--|
| Sofort: | + ³⁾ | +++ | + | — | — |
| Nach 24 Stunden: | ++++ | ++++ | +++ | + | + |

Der Versuch 1 zeigt, daß die Fällungskraft der Kaliumsalze in bezug auf das Kartoffeleiweiß nach der folgenden Anionenreihe abnimmt: $J > Cl > CNS > NO_3, SO_4$.

1) Das Versuchsmaterial (Ernte 1934) stammt aus der estländischen Versuchsstation zu Jõgeva (Leiter Herr J. Aamisepp).

2) Ein Teil des Salzes bleibt ungelöst. Der Niederschlag ist nach 24 Stunden in allen Probegläsern schwarz geworden.

3) + bedeutet schwache Trübung bzw. schwachen Niederschlag; ++++ starke Ausflockung; ++ und +++ sind Zwischenstufen; — bedeutet keine Veränderung.

Versuch 2. „Bravo“ (Blattroller).

Knollengewichte 18 g und 15 g¹⁾. Salze wie beim Vers. 1.

| | KCNS | KCl | KJ | KNO ₃ ²⁾ | K ₂ SO ₄ ²⁾ |
|------------------|------|-----|----|--------------------------------|--|
| Nach 24 Stunden: | +++ | +++ | ++ | — | — |

Bei „Bravo“ ist die Fällungskraft der K-Salze die folgende:
 $\text{CNS} > \text{Cl} > \text{J} > \text{NO}_3, \text{SO}_4$.

Die Versuche 1 und 2 zeigen, daß Neutralsalze das Kartoffeleiweiß nur in sehr hohen Konzentrationen zu fällen vermögen. Der geringeren Löslichkeit einiger Salze wegen ist es nicht möglich alle Lösungen in gleich hoher Konzentration herzustellen, um ihr Fällungsvermögen unter gleichen Bedingungen zu prüfen. Dieser Umstand macht die Ergebnisse der Ausfällungsversuche unsicher, und es kann ihnen daher nur ein orientierender Wert zugesprochen werden. Aus diesem Grunde wurde in den folgenden Versuchen die Kolloidaktivität der Salze in Verbindung mit der Hitzeaggregation des Eiweißes untersucht.

Versuch 3. „Maercker“ (gesund).

Knollengewichte 65 g und 55 g.

2 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 norm.,

bis zum Kochen erhitzt.

| KCNS | KJ | KNO ₃ | K-Azetat | KCl | K ₂ SO ₄ | K-Tartrat |
|-------|------|-------------------|----------|------------|---------------------------------|-----------|
| ++++ | +++ | +++ | ++ | ++ | + | + |
| NaCNS | NaJ | NaNO ₃ | NaCl | Na-Tartrat | Na ₂ SO ₄ | Na-Zitrat |
| ++++ | ++++ | +++ | ++ | ++ | ++ | ++ |

Die untersuchten K- und Na-Salze fördern die Hitzeaggregation des „Maercker“-Eiweißes wie folgt:

K-Salze: $\text{CNS} > \text{J} > \text{NO}_3 > \text{Azetat} > \text{Cl} > \text{SO}_4, \text{Tartrat}$.Na-Salze: $\text{CNS}, \text{J} < \text{NO}_3 > \text{Cl}, \text{Tartrat} > \text{SO}_4, \text{Zitrat}$.

Versuch 4. „Allerfrüheste Gelbe“ (gesund).

Knollen 25 g, 18,5 g, 20 g, 23 g.

2 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 norm.,

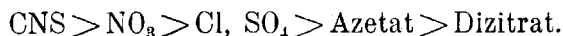
bis zum Kochen erhitzt.

1) Wenn zwei oder mehrere Knollen angegeben sind, so bedeutet dieses, daß der Auszug gleichzeitig aus allen diesen Knollen gewonnen wurde.

2) Ein Teil des Salzes ungelöst.

| | | | | | |
|---------------------|---------------------------------|--------------------|---|-------------------------|---------------------------|
| NH ₄ CNS | NH ₄ NO ₃ | NH ₄ Cl | (NH ₄) ₂ SO ₄ | NH ₄ -Azetat | NH ₄ -Dizitrat |
| ++++ | ++++ | +++ | +++ | ++ | ++ |
| 7,5 ¹⁾ | 7 | 6 | 6 | 4,5 | 4 |

Die Ammoniumsalze fördern die Hitzeegerinnung des Eiweißes der „Allerfrühesten Gelben“ nach folgender Anionenreihe:



Versuch 5.

Kationen.

„Maercker“ (gesund).

Knollengewicht 70 g.

2 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 norm.,

bis zum Kochen erhitzt.

| | | | | | |
|------|-----|------|------|-------------------|-------------------|
| RbCl | KCl | NaCl | LiCl | MgCl ₂ | CaCl ₂ |
| ++ | ++ | ++ | +++ | +++ | ++++ |

Die Kationen der Chloride fördern die Hitzeekoagulation des „Maercker“-Eiweißes wie folgt:



die zweiwertigen Kationen haben somit eine größere Kolloidaktivität.

Versuch 6. „Bravo“ (Blattroller).

Knollengewichte 20 g und 17 g.

Das übrige wie beim Vers. 5.

| | | | | | | |
|--|-----|------------------|----------|--------------------------------|-----|-----------|
| KCNS | KJ | KNO ₃ | K-Azetat | K ₂ SO ₄ | KCl | K-Tartrat |
| ++++ | +++ | +++ | ++ | ++ | + | + |
| Höhe des Sediments in mm nach dem Zentrifugieren | | | | | | |
| 7 | 6 | 6 | 4,5 | 4 | 2,5 | 2,5 |

Vergleicht man die Wirkung der K-Salze auf die Abbauknolle „Bravo“ (Vers. 6) mit derjenigen auf die Vitalknolle „Maercker“ (Vers. 3), so ergibt sich, daß die Wirkung der Salze in beiden Fällen fast die gleiche ist. Das etwas abweichende Verhalten des Chlorids und Sulfats hat bei der gegebenen Versuchsanordnung keine wesentliche Bedeutung.

1) Die Zahlen bedeuten die Höhe des Niederschlages in mm nach dem Zentrifugieren, das in allen Fällen mit einer Handzentrifuge durch 30 gleichmäßige Kurbelumdrehungen ausgeführt wurde. Die Höhenangabe des Sediments bezieht sich auf die üblichen konischen Probegläser.

Versuch 7. Das Umladen des Kartoffeleiweißes. „Allerfrüheste Gelbe“.

Knollengewichte 76 g, 51 g und 60 g.

Der Auszug enthält 0,02 norm. NaOH,

2 ccm Auszug + 1 ccm Salz 1 n., bis zum Kochen erhitzt.

| KCNS | KJ | KNO ₃ | KCl | K-Azetat | K ₂ SO ₄ | K-Tartrat |
|--|------|------------------|------|----------|--------------------------------|-----------|
| — | — | — | ++ | +++ | ++++ | ++++ |
| 0 | 0 | 0 | 4 mm | 6 | 7,5 | 9 |
| 2 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 n., das übrige wie oben. | | | | | | |
| Höhe des Sediments nach dem Zentrifugieren. | | | | | | |
| 0 | 3 mm | 6 | 8 | 9 | 9 | 10 |

Wie Vers. 7 zeigt, kehrt die Anionenreihe beim Versetzen des Kartoffeleiweißes mit etwas Lauge sich um: $\text{CNS} < \text{J} < \text{NO}_3 < \text{Cl} < \text{Azetat} < \text{SO}_4 < \text{Tartrat}$. Dieser Umstand ist aus der Kolloidchemie der Eiweißkörper gut bekannt (Höber 1926, Bechhold 1929).

Mg-Salze und Alkalierden.

Versuch 8. „Majestic“.

Knollengewichte 38,5 g und 48,5 g.

1 ccm Auszug + 2 ccm Salz 2 norm.

| | | | | | | | |
|-----------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|
| Mg(NO ₃) ₂ | MgCl ₂ | MgBr ₂ | MgSO ₄ | Ca(CNS) ₂ | CaBr ₂ | Ca(NO ₃) ₂ | CaCl ₂ |
| Ohne Erhitzen | | | | | | | |
| — | — | — | — | +++ | ++ | ++ | ++ |
| Nach dem Erhitzen bis zum Kochen | | | | | | | |
| 4 mm ¹⁾ | 4 | 3,5 | 3,5 | 4,5 | 4,5 | 4 | 3,5 |
| Sr(NO ₃) ₂ | SrCl ₂ | BaBr ₂ | BaCl ₂ | Na ₂ SO ₄ | K-Tartrat | Kontrolle | |
| Ohne Erhitzen | | | | | | | |
| ++ | ++ | ++ | ++ | — | — | — | |
| Nach dem Erhitzen bis zum Kochen | | | | | | | |
| 5 mm | 4,5 | 4,5 | 4,5 | 2,5 | 2,5 | 2,5 | |

Der Versuch 8 zeigt, daß Ca-, Sr- und Ba-Salze (1,33 norm.) das Kartoffelweiß in der Kälte leicht fällen, Mg-Salze aber nicht. Nach dem Erhitzen bis zum Kochen ist der Niederschlag bei den Ca-, Sr-, und Ba-Salzen etwas stärker als bei den Mg-Salzen. Die zum Vergleich herangezogenen Na₂SO₄ und K-Tartrat bewirken den gleichen Niederschlag wie der Kontrollversuch.

1) S. die Anmerkung beim Versuch 4.

In allen angeführten Versuchen ist die Aktivität der einzelnen Salze, vom Standpunkt der Wirkung der Anionen auf die Eiweißkoagulation gesehen, mehr oder weniger deutlich ausgeprägt. Es kommen aber ab und zu Fälle vor (bei Abbauknollen weniger oft), in denen verschiedene Salze, die übliche optimale Salzkonzentration vorausgesetzt, fast die gleiche Wirkung haben.

Versuch 8a. „Early rose“.

2 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 n., erhitzt bis zum Kochen.

| | KCNS | KJ | KNO ₃ | K ₂ SO ₄ | KCl | K-Tartrat | K-Azetat |
|-------------------|---|----|------------------|--------------------------------|-----|-----------|----------|
| | Sedimenthöhe in mm nach dem Zentrifugieren. | | | | | | |
| a) Gesund, 54 g | 5 | 5 | 5 | 5 | 4 | 4 | 4 |
| b) Kräuseln, 39 g | 7 | 7 | 7 | 6 | 6 | 6 | 5 |

Der Vers. 8a zeigt, daß in den beiden Fällen (a und b) Wirkungsunterschiede bei der Mehrheit der Anionen fehlen, bzw. viel kleiner sind als gewöhnlich. Das Eiweiß der Vitalknolle ist etwas resistenter gegen Salze (Niederschlag geringer!), als das der Abbauknolle.

Die Koagulationstemperaturen des Kartoffeleiweißes bei steigender Temperatur.

Um feinere Unterschiede der Wirkungen der Salze auf die Hitzekoagulation des Kartoffeleiweißes zu studieren, wurden noch folgende Versuche ausgeführt.

In einer mit zwei parallelen Glaswänden versehenen Messingwanne ($8,5 \times 8,5 \times 16$ cm, Inhalt — 1000 ccm) wurden jedesmal 500 ccm dest. Wasser mit einem Gasbrenner erhitzt. In dieses Bad tauchte man ein dünnes Probeglas mit 3 ccm Kartoffeleiweiß + Salz, sowie ein in 0,1 Grade geteiltes Thermometer. Der Hitzekoagulationspunkt des Eiweißes wurde bei einer bestimmten Trübungsstufe der Lösung festgesetzt, welche durch das Verschwinden der Schrift einer gut belichteten Tageszeitung hinter der undurchsichtig gewordenen Eiweißlösung ermittelt wurde (vgl. Pauli 1899).

Das Ansteigen der Temperatur des Wassers in der Wanne ging gleichmäßig vor sich und dauerte bis zur Erreichung von 70° durchschnittlich ca. 7,5 Minuten.

Beeinflussung der Hitzegerinnungstemperatur des Kartoffeleiweißes durch Salze.

1 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 norm.

Koagulationstemperatur in °C.

A.

| Vers. | Sorte | An. Kat. | Kontr. | CNS | J | Aze- tat | NO ₃ | Tart- rat | Cl | SO ₄ |
|-------|-----------------------------------|-------------|--------|------|------|-------------|-----------------|--------------|------|-----------------|
| | | | | | | | | | | |
| 9. | „Väike verev“ (gesund) | Kalium | 74,8 | 65,8 | 67,5 | 68,0 | 68,5 | 70,2 | 69,8 | 71,2 |
| | | | 75,3 | 66,4 | 68,5 | 68,3 | 68,3 | 69,0 | 69,5 | 72,0 |
| | | | 75,5 | 66,3 | 68,1 | 68,2 | 68,4 | 69,3 | 69,6 | 71,8 |
| | Mittelwert | | 75,5 | 66,1 | 68,0 | 68,2 | 68,4 | 69,5 | 69,6 | 71,6 |
| | „Väike verev“ (gesund) | Natrium | — | 66,2 | 65,5 | 67,5 | 68,0 | 69,5 | 69,4 | 72,6 |
| | | | — | 67,0 | 65,8 | 67,6 | 68,3 | 69,0 | 69,5 | 74,0 |
| | | | — | 66,9 | 66,0 | 67,5 | 68,1 | 69,6 | 69,3 | 73,8 |
| | Mittelwert | | — | 66,7 | 65,8 | 67,5 | 68,1 | 69,4 | 69,4 | 73,8 |
| 10. | „Väike verev“ (mosaikkrank) | Kalium | 72,1 | 62,0 | 65,3 | 67,0 | 68,5 | 69,0 | 69,3 | 70,8 |
| | | | 72,4 | 62,5 | 65,1 | 66,8 | 67,6 | 68,3 | 68,5 | 71,0 |
| | | | 72,3 | 62,7 | 65,0 | 67,2 | 67,9 | 68,9 | 69,0 | 71,1 |
| | Mittelwert | | 72,3 | 62,4 | 65,1 | 67,0 | 68,0 | 68,7 | 68,9 | 71,0 |
| | „Väike verev“ (mosaikkrank) | Natrium | — | 62,9 | 61,8 | 65,5 | 68,3 | 69,4 | 69,5 | 70,2 |
| | | | — | 63,5 | 61,4 | 65,0 | 67,5 | 69,0 | 69,2 | 71,3 |
| | | | — | 63,2 | 62,0 | 65,6 | 68,1 | 69,1 | 69,4 | 71,2 |
| | Mittelwert | | — | 63,2 | 61,7 | 65,4 | 67,9 | 69,2 | 69,7 | 70,9 |

Die Koagulationsversuche bei steigender Temperatur (Nr. 9—16, s. Übersichtstabelle, S. 13) zeigen, daß alle Salze die Hitzegerinnung des Kartoffeleiweißes fördern, die Koagulationstemperatur (K. T.) ist bei Zusatz von Salzen niedriger als ohne Salz¹⁾. Die einzige Ausnahme bildet der Vers. 12 („Reichskanzler“, mosaikkrank), in welchem von den Na-Salzen das Chlorid und Sulfat die K. T. etwas erhöhten. Solche Fälle sind in der Regel sehr selten. Wenn man die Aktivität der Anionen vergleicht, so sieht man im allgemeinen keinen prinzipiellen Unterschied hinsichtlich der Wirkung auf das Eiweiß der gesunden und der abbaukranken Knollen: in beiden Fällen haben wir dieselben Anionenreihen erhalten, und zwar die folgenden (s. Übersichtstabelle üb. d. Wirkung der Anionen, S. 11).

1) Bei der Ermittlung der Koagulationstemperatur ohne Salz wurde zum Auszug soviel dest. Wasser hinzugefügt wie bei den Salzversuchen die Menge der Salzlösung betrug.

Koagulationstemperatur in °C.

B.

| Vers. | Sorte | An. Kat | Kontr. | CNS | J | NO ₃ | Cl | SO ₄ |
|-------|---|------------|-------------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 11. | „Reichs- kanzler“ (gesund) Mittelwert | Natrium | Koagulierte nicht beim Kochen | — — — — | 73,5 74,0 73,7 74,0 | 76,0 75,8 76,0 76,0 | 76,4 75,5 76,4 76,1 | 76,5 76,1 75,7 76,1 |
| | „Reichs- kanzler“ (gesund) Mittelwert | Ammonium | — — — — | 71,5 72,0 72,1 71,9 | — — — — | 72,5 72,4 72,1 72,3 | 72,5 73,0 73,2 72,9 | 74,0 73,4 73,6 73,7 |
| 12. | „Reichs- kanzler“ (mosaikkrank) Mittelwert | Natrium | 70,3 70,2 70,4 70,3 | — — — — | 62,1 61,4 61,7 61,7 | 69,2 68,7 68,9 68,9 | 71,5 70,8 71,3 71,2 | 72,3 72,7 71,8 72,3 |
| | „Reichs- kanzler“ (mosaikkrank) Mittelwert | Ammonium | — — — — | 60,2 60,8 61,2 60,7 | — — — — | 65,8 65,2 65,3 65,4 | 68,2 69,0 68,3 68,5 | 70,3 69,7 70,5 70,2 |
| C. | „Early rose“ (gesund) Mittelwert | Natrium | 86,0 87,2 86,4 86,5 | — — — — | 73,5 71,6 72,2 72,3 | 74,5 74,0 74,2 74,2 | 74,4 74,5 74,6 74,5 | 75,2 75,5 74,5 75,1 |
| 14. | „Early rose“ (Blattroller) Mittelwert | Natrium | 75,6 76,4 76,0 76,0 | — — — — | 70,2 68,9 69,2 69,4 | 72,8 73,2 73,0 73,0 | 73,1 72,6 73,6 73,1 | 75,5 73,5 74,0 74,3 |

Übersichtstabelle über die Wirkung der Anionen auf die K. T. des Eiweißes der Vital- und der Abbauknollen.

Kation Anion →

K — CNS > J > Azetat > NO₃ > Tartrat, Cl > SO₄

Na — J > CNS > Azetat > NO₃ > Tartrat, Cl > SO₄

NH₄ — CNS > NO₃ > Cl > SO₄

Mg — Br > NO₃ > Cl > SO₄

Ca — CNS > Br > NO₃ > Cl

Die Wirkung der Anionen kommt in einer Salzgruppe, z. B. bei den Alkalisalzen, im allgemeinen deutlicher zum Vorschein als die der Kationen, obwohl die Wirkungsunterschiede zwischen

Koagulationstemperatur in °C.

C.

| Vers. | Sorte | An. Kat. | Kontr. | CNS | J | Br | NO ₃ | Cl | SO ₄ |
|-----------|------------------------|-------------|--------|------|------|------|-----------------|------|-----------------|
| 15. | „Majestic“ (gesund) | Natrium | 73,5 | — | 66,8 | — | 69,4 | 70,2 | 72,8 |
| | | | 74,2 | — | 66,5 | — | 69,0 | 71,0 | 73,0 |
| | | | 73,8 | — | 67,0 | — | 68,8 | 70,8 | 72,6 |
| | Mittelwert | | 73,8 | — | 66,8 | — | 69,1 | 70,6 | 72,8 |
| | „Majestic“ (gesund) | Kalzium | — | 51,5 | — | 55,6 | 56,2 | 61,5 | — |
| | | | — | 52,0 | — | 56,0 | 57,3 | 61,6 | — |
| | | | — | 51,0 | — | 55,8 | 56,6 | 62,0 | — |
| | Mittelwert | | — | 51,3 | — | 55,8 | 56,7 | 61,7 | — |
| | „Majestic“ (gesund) | Magnesium | — | — | — | 63,5 | 64,4 | 66,2 | 68,5 |
| | | | — | — | — | 63,0 | 64,0 | 66,0 | 68,0 |
| | | | — | — | — | 63,4 | 64,3 | 65,8 | 69,0 |
| | Mittelwert | | — | — | — | 63,4 | 64,2 | 66,0 | 68,6 |
| E. 16. | „Bravo“ (Kräuseln) | Natrium | 70,6 | — | 62,3 | — | 67,6 | 68,5 | 70,3 |
| | | | 70,5 | — | 61,5 | — | 67,0 | 67,9 | 70,0 |
| | | | 70,0 | — | 61,8 | — | 66,8 | 67,9 | 69,8 |
| | Mittelwert | | 70,4 | — | 61,9 | — | 67,1 | 68,1 | 70,0 |
| | „Bravo“ (Kräuseln) | Kalzium | — | 54,0 | — | 57,3 | 57,5 | 63,0 | — |
| | | | — | 54,5 | — | 56,5 | 58,0 | 62,4 | — |
| | | | — | 55,0 | — | 56,0 | 57,3 | 62,0 | — |
| | Mittelwert | | — | 54,5 | — | 56,0 | 57,6 | 62,5 | — |
| | „Bravo“ (Kräuseln) | Magnesium | — | — | — | 61,0 | 62,6 | 66,5 | 67,5 |
| | | | — | — | — | 60,0 | 63,0 | 65,3 | 68,1 |
| | | | — | — | — | 61,5 | 62,0 | 65,7 | 68,0 |
| | Mittelwert | | — | — | — | 61,5 | 62,5 | 65,8 | 67,8 |

dem Tartrat, dem Chlorid und dem Sulfat (bzw. Zitrat) nicht immer gut ausgeprägt sind. Aus diesem Grunde hat die nicht ganz übereinstimmende Stellung dieser Anionen in den Versuchen 3—6 und in der unten folgenden Tabelle (S. 13) keine große Bedeutung.

Besprechung der Ergebnisse.

Die bei den Versuchen erhaltenen Anionenreihen sind die Hofmeister'schen (1887, Pauli 1902) oder die lyotropen (Freundlich 1920) Reihenfolgen. Den genannten Autoren nach wird natives Hühnereiweiß durch Alkalisalze (z. B. Na-Salze) nach der folgenden Anionenreihe gefällt¹⁾:

1) Die Rhodanide und Jodide fällen natives Eiweiß nicht.

Übersichtstabelle über die Versuche 9—16.

| Vers. | Sorte | Kat. | A n i o n → | | | | | | | Ohne Salz |
|-------|---|-----------------------|------------------------------|--------------|--------------|-----------------|--------------|-----------------|------------------------------------|-----------|
| | | | CNS | J | Aze- tat | NO ₃ | Tart- rat | Cl | SO ₄ | |
| 9. | „Väike verev“, gesund, 44 g | K Na | Koagulationstemperatur in °C | | | | | | | 75,2 — |
| | | | 66,1 66,7 | 68,0 65,8 | 68,2 67,5 | 68,4 68,1 | 69,5 69,4 | 69,6 69,4 | 71,6 73,4 | |
| 10. | „Väike verev“, mosaikkr., 18 g, 19 g | K Na | 62,4 63,2 | 65,1 61,7 | 67,0 65,4 | 68,0 67,9 | 68,7 69,2 | 68,9 69,7 | 71,0 70,9 | 72,3 — |
| | | | | | | | | | | |
| | | | CNS | J | Br | NO ₃ | Cl | SO ₄ | Ohne Salz | |
| 11. | „Reichskanzler“, gesund, 37,5 g | Na NH ₄ | — 71,9 | 74,0 — | — — | 76,0 72,3 | 76,1 72,9 | 76,2 73,7 | keine Koagul. beim Kochen | |
| 12. | „Reichskanzler“, mosaikkr., 72,5 g | Na NH ₄ | — 60,7 | 61,7 — | — — | 68,9 65,4 | 71,2 68,5 | 72,3 70,2 | 70,3 — | |
| 13. | „Early rose“, gesund, 41 g | Na | — | 72,3 | — | 74,2 | 74,5 | 75,1 | 86,5 | |
| 14. | „Early rose“, Blatt- roll., 39 g | Na | — | 69,4 | — | 73,0 | 73,1 | 74,3 | 76,0 | |
| 15. | „Majestic“, gesund, 55 g | Na | — | 66,8 | — | 69,1 | 70,6 | 72,8 | 73,8 | |
| | | Ca | 51,3 ¹⁾ | — | 55,8 | 56,7 | 61,7 | — | — | |
| | | Mg | — | — | 63,4 | 64,2 | 66,0 | 68,6 | — | |
| 16. | „Bravo“, Kräuseln, 15 g, 13 g | Na | — | 61,9 | — | 67,1 | 68,1 | 70,0 | 70,4 | |
| | | Ca | 54,5 ¹⁾ | — | 56,6 | 57,6 | 62,5 | — | — | |
| | | Mg | — | — | 61,5 | 62,5 | 65,8 | 67,8 | — | |

CNS, J < NO₃ < Cl < Azetat < Tartrat < Zitrat < SO₄. Dieselbe Ionenreihe hat auch für das Laugeneiweiß Geltung. In saurer Lösung kehrt sich die Reihenfolge um, d. h. die Wirksamkeitssteigerungen von Ion zu Ion sind der obigen Reihe entgegengesetzt:

CNS > J > Br > NO₃ > Cl > Azetat (Höber 1926).

Unsere Anionenreihen haben sich als die umgekehrten lyotropen Reihen erwiesen.

Etwaige Abweichungen sind Versuchsfehlern und insbesondere dem Umstände zuzuschreiben, daß die Versuche nicht mit chemisch reinen Stoffen ausgeführt wurden.

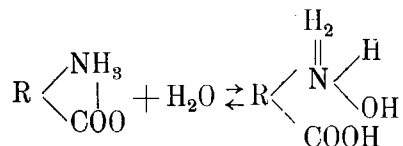
1) Beim Hinzusetzen aller Ca-Salzlösungen erschien im Eiweiß ein schwacher durchsichtiger Niederschlag, welcher beim Erhitzen bei den angegebenen Temperaturen undurchsichtig wurde.

Die umgekehrten Anionenreihen zeigen, daß das Kartoffel-eiweiß ein sog. Säureeiweiß (positives Eiweiß) ist.

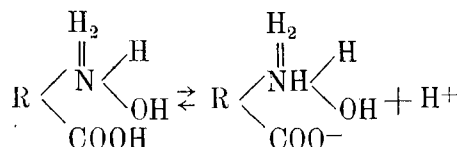
Nach Hardy¹⁾ und Pauli (1920) können wir elektrisch neutrales Eiweiß nach dem Schema eines zyklischen Ammonium-

salzes $R \begin{array}{c} \text{NH}_3 \\ | \\ \text{COO} \end{array}$ darstellen. Bekanntlich besteht das bei Unter-

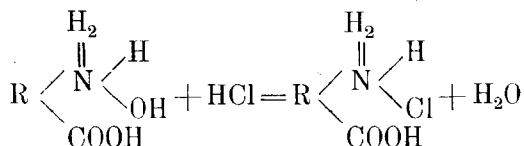
suchungen verwendete Eiweiß (verschiedene Sera u. and.) überwiegend aus Monoaminosäuren. Diese zeigen, als amphotere Elektrolyte, eine größere Fähigkeit zur Ionisation von H-Ionen, als von OH-Ionen, und sind deswegen schwache Säuren. Das-selbe kann auch für Eiweiß maßgebend sein, welches nach der Anlagerung von Wasser nach dem Schema



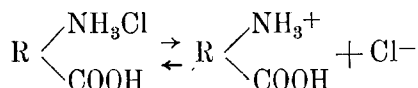
eine sehr kleine Anzahl negativer Eiweißionen und H-Ionen dissoziiert:



Durch Zusatz von Säure, z. B. HCl, wird Eiweißsalz gebildet,



welches positive Eiweißionen und Cl-Ionen dissoziiert:



Das Ionisationsmaximum (dialysiertes Rinderserum, Eiweiß-gehalt ca. 1%) wurde in den Versuchen von Pauli und Handowsky (1909) durch dem Eiweiß zugesetzte HCl bei ca 0,0016—0,02 norm. erreicht. Durch einen weiteren Zusatz

1) Zit. nach Pauli (1920).

von Säure wurde die Ionisation durch das gemeinsame Cl-Ion allmählich zurückgedrängt, und es bildeten sich neutrale Eiweiß-

teilchen $R \begin{cases} \text{NH}_3\text{Cl} \\ \text{COOH} \end{cases}$. Ungefähr dieselben Ionisationsverhältnisse

wurden zuerst von Laqueur und Sackur (1903) bei Alkali-kaseinaten gefunden. Diese Autoren bewiesen, daß die Eiweiß-ionen die Träger der hohen inneren Reibung sind, eine Tatsache, die durch die starke Hydratation (Wasserbindung) der Eiweiß-ionen erklärt wird. Mit dem Anwachsen der Zahl der Eiweiß-ionen wird eine Eiweißlösung stabiler und gegen dehydrierende Zustandsänderungen resistenter. So z. B. unterbleibt nahe beim Ionisationsmaximum die Hitzegerinnung, die Eiweißlösung bleibt beim Kochen unverändert. Infolge eines weiteren Zusatzes von Säure, bzw. Neutralsalzen, tritt die Hitzekoagulation wieder auf. Bei einer schwächeren Ionisation kann die Koagulations-temperatur des ionischen Eiweißes höher liegen, als beim elektrisch neutralen Eiweiß.

In den lebensstätigen Zellen der Kartoffelpflanze findet man im Saftraum neben gelöstem Eiweiß immer organische Säuren, der Zellsaft reagiert sauer. Wegen der Fähigkeit der Eiweiß-körper Säuren zu binden ist es sehr wahrscheinlich, daß die Kartoffelproteine mit gewissen Säuren des Zellsaftes Eiweiß-salze bilden. Die letzteren können stark ionisiert sein; darauf weist der Umstand hin, daß bei unseren Versuchen Fälle vor-kamen, in welchen die Eiweißlösung (der Auszug) beim Kochen unverändert blieb, d. h. eine Ausflockung unterblieb; in ande-ren Fällen war in der durchsichtigen Lösung nur eine leichte Trübung zu bemerken. Solche Fälle waren ziemlich selten. Eine Gegenüberstellung der K. T-en aus den Versuchen 9—16 zeigt uns folgendes:

K. T-en von Kartoffeleiweiß ohne Zusatz von Salz.

| Zustand \ Sorte | „Väike verev“ | „Reichs-kanzler“ | „Early rose“ | „Majestic“ |
|--------------------------|---------------|----------------------|--------------|------------------|
| Gesund | 75,2° | Beim Kochen | 86,5° | 73,8° |
| Abbaukrank | 72,3° | unverändert 70,3° | 76,0° | „Bravo“ 70,4° |
| N a c h 24 S t u n d e n | | | | |
| Gesund | — | 75,5° | — | Beim Kochen |
| Abbaukrank | — | 67,8° | — | unverändert |

Bei den gesunden Knollen sind die K. T-en in allen Fällen höher als bei den abbaukranken Knollen. Beim gesunden „Reichskanzler“ gerinnt das Eiweiß beim Kochen nicht. Höhere K. T-en beweisen eine größere Hitzeresistenz, welche sich durch eine stärkere Ionisation des Säureeiweißes deuten läßt.

Hitzekoagulation des Kartoffeleiweißes in alkalischer Lösung.

11 ccm Auszug + 2 ccm Salz 1 norm.

| Vers. | Sorte | Laugengehalt | An. | J | Br | NO ₃ | Cl | SO ₄ |
|---------------------------|-------------------------|------------------------------|-----------|------------------------------|------|-----------------|------|-----------------|
| | | | Kat. | | | | | |
| 17. | „Imperator“ (gesund) | Kontrolle (ohne Lauge) | Natrium | Koagulationstemperatur in °C | | | | |
| | 62,2 | | | — | 67,2 | 69,8 | 72,0 | |
| | 61,8 | | | — | 68,0 | 71,0 | 73,2 | |
| | 61,0 | | | — | 67,5 | 71,2 | 73,0 | |
| 18. | Mittelwert | | | 61,7 | — | 67,5 | 70,3 | 72,7 |
| | „Imperator“ (gesund) | 0,02 n. NaOH im Eiweiß | Natrium | 72,1 | — | 71,7 | 71,3 | 71,7 |
| | 72,0 | | | — | 72,3 | 69,8 | 72,1 | |
| | 72,3 | | | — | 71,8 | 70,4 | 71,6 | |
| Mittelwert | 72,1 | | | — | 71,9 | 70,5 | 71,8 | |
| 19. | „Imperator“ (gesund) | 0,04 n. NaOH | Natrium | 79,5 | — | 76,3 | 73,2 | 71,5 |
| | 80,2 | | | — | 77,6 | 74,8 | 72,3 | |
| | 79,4 | | | — | 76,8 | 74,3 | 71,6 | |
| | Mittelwert | | | 79,7 | — | 76,9 | 74,1 | 71,8 |
| 20. | „Imperator“ (gesund) | 0,025 n. NaOH | Magnesium | — | 53,0 | 52,6 | 55,2 | 59,3 |
| | — | | | 52,0 | 53,0 | 55,0 | 58,5 | |
| | — | | | 51,0 | 52,5 | 55,7 | 59,6 | |
| | Mittelwert | | | — | 52,0 | 52,7 | 55,3 | 59,1 |
| 21. | „Imperator“ (gesund) | 0,04 n. NaOH | Magnesium | — | +++ | +++ | ++ | + |
| Ausflockung ohne Erhitzen | | | | | | | | |
| 22. | „Bravo“ (Kräuseln) | Kontrolle (ohne Lauge) | Natrium | 63,0 | — | 68,4 | 71,5 | 73,5 |
| | 63,8 | | | — | 69,1 | 72,0 | 72,8 | |
| | 64,0 | | | — | 67,9 | 71,6 | 73,0 | |
| | Mittelwert | | | 63,6 | — | 68,5 | 71,7 | 73,1 |
| 23. | „Bravo“ (Kräuseln) | 0,04 n. NaOH | Natrium | 86,0 | — | 79,6 | 74,8 | 71,5 |
| | 85,0 | | | — | 78,3 | 75,2 | 72,0 | |
| | 87,0 | | | — | 79,1 | 76,5 | 71,0 | |
| | Mittelwert | | | 86,0 | — | 79,0 | 75,5 | 71,5 |
| 24. | „Bravo“ (Kräuseln) | 0,04 n. NaOH | Magnesium | — | 59,1 | 57,1 | 61,0 | 63,8 |
| | — | | | 59,5 | 58,0 | — | 64,0 | |
| | — | | | 59,0 | 57,7 | 61,6 | 64,2 | |
| | Mittelwert | | | — | 59,2 | 57,6 | 61,3 | 64,0 |

Nach 24 Stunden wurde der Knollenauszug braun bis schwarz (vgl. Bechhold und Erbe 1932). Man sah in der Flüssigkeit feine schwarze Teilchen suspendiert; nach dem Filtrieren wurde die Farbe etwas heller. Die Hitzegerinnung des Filtrates war immer anders als die des frischen Auszuges. Die K. T-en waren entweder niedriger, oder — was öfter zutraf — die Hitzekoagulierbarkeit ging ganz verloren. Dem Anscheine nach geht beim Stehen zum Teil Eiweißabbau vor sich.

Wie der Versuch 7 zeigt, läßt sich das Kartoffeleiweiß durch einen Zusatz von Lauge leicht umladen: die Anionenreihe kehrt sich um. Dabei ist kein prinzipieller Unterschied zwischen dem Eiweiß der gesunden und der kranken Knollen zu bemerken. Im folgenden ist die Verschiebung der K. T-en in alkalischer Lösung dargestellt:

Übersichtstabelle über die Versuche 17—24.

| Vers. | Sorte | Laugengehalt im Eiweiß | Kation | J | Br | NO ₃ | Cl | SO ₄ |
|-------|-------------------------------------|---------------------------------|--------|------------------------------|------|-----------------|------|-----------------|
| 17. | „Imperator“, gesund, 63 g | Kontrolle (ohne Lauge) | Na | Koagulationstemperatur in °C | | | | |
| | | | | 61,7 | — | 67,5 | 70,3 | 72,7 |
| 18. | | 0,02 norm. NaOH im Eiweiß | Na | 72,1 | — | 71,9 | 70,5 | 71,8 |
| 19. | | 0,04 norm. NaOH | Na | 79,7 | — | 76,9 | 74,1 | 70,2 |
| 20. | | 0,025 norm. NaOH | Mg | — | 52,0 | 52,7 | 55,3 | 59,1 |
| 21. | | 0,04 norm. NaOH | Mg | — | +++ | +++ | ++ | + |
| | | | | Ausflockung ohne Erhitzen | | | | |
| 22. | „Bravo“, Kräuseln, 24 g; 12 g | Kontrolle (ohne Lauge) | Na | 63,6 | — | 68,5 | 71,7 | 73,1 |
| 23. | | 0,04 norm. NaOH | Na | 86,0 | — | 79,0 | 75,5 | 71,5 |
| 24. | | do | Mg | — | 59,2 | 57,6 | 61,3 | 64,0 |

Dem Kontrollversuche (Nr. 17) nach fördern die Na-Salze die Hitzegerinnung in der lyotropen Reihenfolge: $J > NO_3 > Cl > SO_4$, wobei die K. T. zwischen 61,7° und 72,7° schwankt.

Bei 0,02 norm. NaOH in der Eiweißlösung haben die Salze ungefähr die gleiche Wirkung (Vers. 18), die Aktivität der energiereichen wirkenden Anionen (J , NO_3) ist schwächer geworden und ist etwa der des Sulfats gleich. Bei weiterem Zusatz von Lauge kehrt sich die Anionenreihe um (Vers. 19): $J < NO_3 < Cl < SO_4$, die K. T.-en sind durchschnittlich um ca. 8° höher als beim Kontrollversuch. Bei Mg- und Ca-Salzen gelang es nicht durch Zusatz von Alkali eine Umkehrung der Anionenreihen zu erzielen. Im Verhalten des Eiweißes der Abbauknollen gegen die Salze in alkalischer Lösung besteht kein wesentlicher Unterschied.

Ohne Zusatz von Neutralsalzen ist das Kartoffeleiweiß nicht weniger empfindlich gegen Lauge als ein dialysiertes Serum oder natives Hühnereiweiß. Der nachstehende Versuch (25) zeigt, wie verschiedene NaOH-Konzentrationen die Hitzekoagulation des Eiweißes beeinflussen.

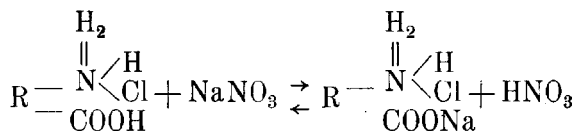
Versuch 25. „Imperator“, 98 g.

| Koagulationstemperatur (K. T.) des Auszuges ohne Lauge — $72,0^\circ$ | |
|---|---|
| Konzentration von NaOH im Auszug | Konzentration von NaOH im Auszug |
| $\frac{1}{300}$ n. — beim Kochen unverändert | $\frac{1}{1800}$ n. — $\frac{1}{4800}$ n. K. T. ca. $75-76^\circ$ |
| $\frac{1}{600}$ n. — „ leichte Trübung | $\frac{1}{5400}$ n. „ „ $73,8^\circ$ |
| $\frac{1}{900}$ n. — K. T. $97-100^\circ$ | $\frac{1}{6000}$ n. „ „ $72,0^\circ$ |
| $\frac{1}{1200}$ n. — „ $85,5^\circ$ | $\frac{1}{7200}$ n. „ „ $72,2^\circ$ |
| $\frac{1}{1500}$ n. — „ „ $77,2^\circ$ | |

In alkalischer Lösung bilden sich mit Basen Eiweißsalze, welche stark ionisiert sind. Im angeführten Versuch Nr. 25 war der Einfluß von NaOH noch bei der Konz. $\frac{1}{5400}$ n. im Sinne einer Erhöhung der K. T. zu bemerken (es wurde die Koagulation des Laugeneiweißes gleichzeitig mit der des gewöhnlichen beobachtet), und erst bei NaOH $\frac{1}{6000}$ n. war kein Unterschied mehr wahrnehmbar. Bezüglich theoretischer Ausführungen über das Alkalieiweiß sei auf die Arbeit von Pauli und Handowsky (1910) und auch auf die von Pauli (1920) hingewiesen.

Kehren wir zur Wirkung der Neutralsalze zurück. Die Salze fördern die Hitzeegerinnung des Kartoffeleiweißes, was auf einer Verminderung der Zahl der Eiweißionen und auf der Bildung elektrisch neutraler Teilchen beruht. Pauli und Handowsky (1909) erklären das in folgender Weise. Gemäß dem oben an-

geführten Schema (s. S. 14) des Säureeiweißes würde das Kation des hinzugesetzten Neutralsalzes (z. B. NaNO_3) an die Stelle des Wasserstoffions der Karboxylgruppe treten:



Treten nun starke An- und Kationen mit dem Eiweiß in Reaktion, so wird die Ionisation fast vollständig unterdrückt, da die entgegengesetzten Ionisierungstendenzen sich das Gleichgewicht halten werden. Durch die Entstehung elektrisch neutraler Eiweißteilchen wird die Hitzeaggregation gefördert.

Wenn normalerweise die K. T. des Kartoffeleiweißes hoch ist, d. h. wenn es stärker ionisiert ist, so wird die K. T. durch Salze mehr herabgesetzt. So beträgt z. B. bei „Early rose“ (Vers. 13) die normale K. T. $86,5^{\circ}$, durch die Salzreihe $\text{NaJ} \rightarrow \text{Na}_2\text{SO}_4$ wird sie auf $72,3^{\circ}$ bis $75,1^{\circ}$, also um ca. $11-14^{\circ}$ herabgesetzt. Bei „Majestic“ (Vers. 15) ist die normale K. T. $73,8^{\circ}$ und wird durch dieselben Salze auf $66,8^{\circ}$ bis $72,8^{\circ}$, also um $1-7^{\circ}$ herabgesetzt. Jedoch sind alle K. T-en bei „Early rose“ verhältnismäßig höher.

Vergleicht man die durch Alkalisalze beeinflussten K. T-en, so springt der Umstand in die Augen, daß für das Eiweiß der gesunden Knollen die K. T-en höher sind. Die Differenzen der K. T-en (Na-Salze, Vers. 9—16) gesund — abbaukrank stellen sich wie folgt:

| | CNS | J | NO_3 | Cl | SO_4 |
|----------------------|-----|------|--------------------|-----|---------------|
| | | | $^{\circ}\text{C}$ | | |
| „Väike verev“ | 3,5 | 4,1 | 0,2 | 0,3 | 2,5 |
| „Reichskanzler“ | — | 12,3 | 7,1 | 4,9 | 3,9 |
| „Early rose“ | — | 2,9 | 1,2 | 1,4 | 0,8 |
| „Majestic“ — „Bravo“ | — | 4,9 | 2,0 | 2,5 | 2,8 |

Die Differenzen der K. T-en nehmen ungefähr in der lyotropen Reihenfolge $\text{J} \rightarrow \text{SO}_4$ ab. Eine etwas größere Hitzeresistenz beim Eiweiß der gesunden Knollen weist auf eine größere Zahl von Eiweißionen hin. Vielleicht steht dieses in einer gewissen Beziehung zu der von Boas (1910)¹⁾ bei gesunden Kartoffelpflanzen gefundenen größeren Azidität des Zellsaftes. Er sagt: „Es wurde nun fast ausnahmslos gefunden, daß die gesunden Pflanzen einen merkbar saueren Zellsaft besitzen als die

1) Zit. nach Merckenschlager 1929.

kranken. Die Resultate waren stets gleichsinnig, gleich ob drei, fünf, sieben oder gar fünfundzwanzig Gramm Blatt- oder Stengelmasse mit 50 bis 150 ccm Wasser ausgezogen wurden“.

Eine größere Azidität des Zellsaftes könnte die Säurebindung seitens des Eiweißes begünstigen. Insbesondere käme die Oxalsäure in Betracht, welche, nach Pauli und Handowsky (1909), in Verbindung mit Protein in der Fähigkeit Eiweißionen zu dissoziieren der Salzsäure nahekommt.

Statt die Wirkung aller Anionen der lyotropen Reihe zu analysieren, können wir hier auch nur diejenige der Endglieder dieser Reihenfolge in Betracht ziehen, z. B. die von NaJ und Na_2SO_4 . In der Regel ist die K. T. beim Zusatz von Jodid am niedrigsten¹⁾, und beim Zusatz von Sulfat am höchsten. Die Amplitude der K. T.en, die durch diese Endglieder der lyotropen Reihe markiert wird, ist um so kleiner, je höher die normale K. T. des Eiweißes liegt, d. h. je mehr das Eiweiß ionisiert ist. Dieses ist aus der nachstehenden Zusammenstellung (s. Vers. 9—16) ersichtlich.

| | Differenz zwischen den K. T.en beim Zusatz von Na_2SO_4 und NaJ | K. T. normal |
|---------------------------------|--|-------------------|
| „Väike verev“, gesund | 7,6 ⁰ | 75,2 ⁰ |
| „ abbaukrank | 9,2 ⁰ | 72,3 ⁰ |
| „Reichskanzler“, gesund | 2,2 ⁰ | keine Gerinnung |
| „ abbaukrank | 10,6 ⁰ | 70,3 ⁰ |
| „Early rose“, gesund | 2,8 ⁰ | 86,5 ⁰ |
| „ abbaukrank | 4,9 ⁰ | 76,0 ⁰ |
| „Majestic“, gesund | 6,0 ⁰ | 73,8 ⁰ |
| „Bravo“, abbaukrank | 8,1 ⁰ | 70,4 ⁰ |

Wie man sieht, sind bei allen kranken Knollen die Temperaturdifferenzen zwischen den durch Na-Jodid und -Sulfat bewirkten K. T.en größer, als bei den gesunden Knollen. Dieses hängt von der Ionisation des Eiweißes ab: ist letzteres gut ionisiert, so ist es auch widerstandsfähig gegen dehydrierende Zustandsänderungen; die Unterschiede zwischen den Wirkungen der verschiedenen Neutralsalze werden kleiner, bzw. diese wirken alle fast gleich, und die K. T.en stellen sich durchschnittlich höher

1) Aus der lyotropen Reihe kommen hier Jodide, Nitrate, Chloride und Sulfate in Betracht, also Salze, die in allen Versuchen verwendet worden sind.

(vgl. „Reichskanzler“, „Early rose“, gesund, und auch den Vers. 8a).

Da das Eiweiß einer jeden Kartoffelsorte bis zu einem gewissen Grade individuelle Eigenschaften besitzen kann, demnach die K. T-en der Vital- und Abbauknollen bei der einen Sorte beide höher oder niedriger liegen können, als bei der anderen, so dürfte die Tatsache, daß die durch die Anionen der lyotropen Reihe bewirkte Temperaturamplitude bei gesunden Knollen kleiner und bei kranken größer ist, streng genommen nur für eine und dieselbe Sorte maßgebend sein.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß das Eiweiß gesunder Knollen durchschnittlich mehr ionisiert ist, als das der Abbauknollen.

Was die Wirkung der Kationen anbelangt, so gilt für sie die Reihenfolge: $\text{Rb}, \text{K} < \text{Na} < \text{NH}_4 < \text{Li} < \text{Mg} < \text{Ca}, \text{Sr}, \text{Ba}$. Die einwertigen Kationen besitzen eine bei weitem kleinere Aktivität als die zweiwertigen, insbesondere als die Ca-, Sr- und Ba-Salze, welche schon in ziemlich schwachen Konzentrationen (ca. 0,5—1 n.) bei Zimmertemperatur das Kartoffeleiweiß fällen. In alkalischer Lösung wird die Wirkung der zweiwertigen Kationen im gleichen Sinne noch etwas stärker.

Soweit es die hier beschriebenen Versuche zeigen, besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen der Wirkung der Kationen auf das Eiweiß der gesunden und der kranken Knollen.

Kurze Zusammenfassung.

Es wurde das Verhalten des im Zellsaft gelösten Eiweißes der gesunden und der abbaukranken Kartoffelknollen gegen Neutralsalze untersucht.

Durch K- und Na-Salze wird das Eiweiß in sehr hohen Konzentrationen (bis 6 norm.) und unvollständig ausgesalzt, Ca-, Sr- und Ba-Salze fällen es in mittleren Konzentrationen (ca. 0,5—1,0 n.) leicht, die Mg-Salze nehmen eine Mittelstellung zwischen den beiden genannten Salzgruppen ein.

Bei den Alkalisalzen ist die Wirkung der Anionen deutlicher ausgeprägt, als diejenige der Kationen. Die Salze fördern die Hitzeoagulation des Kartoffeleiweißes nach der umgekehrten lyotropen Reihenfolge: $\text{CNS} > \text{J} > \text{Azetat} > \text{NO}_3 > \text{Tartrat}$, Cl , SO_4 . Bei den Alkalierden ist die Wirkung der Anionen etwas weniger deutlich; auch hier wird dieselbe Reihenfolge eingehalten: $\text{CNS} > \text{Br} > \text{NO}_3 > \text{Cl} > (\text{SO}_4)^1$.

Das Kartoffeleiweiß ist ein Säureeiweiß (positives Eiweiß); in schwach alkalischer Lösung erfolgt die Umbildung des Säureeiweißes in Alkalieiweiß (negatives Eiweiß); die oben angeführte Wirkungsreihe der Anionen kehrt sich bei Alkalisalzen um, während sie bei Erdalkalien dieselbe bleibt.

Die Kationen wirken in der Reihenfolge: $\text{Rb}, \text{K} < \text{Na} < < \text{NH}_4 < \text{Li} < \text{Mg} < \text{Ca}, \text{Sr}, \text{Ba}$. Die zweiwertigen Kationen üben eine bedeutend größere Aktivität aus als die einwertigen. In schwach alkalischer Lösung wird die Wirkung der Erdalkalkationen etwas stärker.

Im Verhalten des Eiweißes der kranken Knollen gegen Salze ist kein prinzipieller Unterschied zu konstatieren. Der einzige Unterschied besteht, soweit es die vorliegenden Versuche zeigen, darin, daß das Eiweiß der gesunden Knollen mehr ionisiert und infolgedessen etwas stabiler gegen dehydrierende Zustandsänderungen ist.

1) Bei Mg-Salzen.

Literatur.

- Bechhold, H., 1929, Die Kolloide in Biologie und Medizin. Leipzig.
- Bechhold, H. und Erbe, F., 1932, Zur Biologie der Kartoffel, 16. Mitt., Arb. aus d. biol. Reichsanst. **20**.
- Czapek, F., 1925, Biochemie der Pflanzen, Bd II.
- Freundlich, H., 1920, Kapillarchemie. Leipzig.
- Höber, R., 1926, Physikalische Chemie der Zelle und der Gewebe. Leipzig.
- Hofmeister, Fr., 1887, Zur Lehre von der Wirkung der Salze, Arch. f. experim. Pathol. und Pharm. **24**.
- Lepeschkin, W. W., 1923, Über die chemische Zusammensetzung des Protoplasmas des Plasmodiums, Ber. der deutsch. botan. Ges. **41**.
- 1924, Kolloidchemie des Protoplasmas. Berlin.
- 1926, Über die chemische Zusammensetzung der lebenden Materie, Biochem. Zeitschr. **171**.
- Merkenschlager, F., 1929, Zur Biologie der Kartoffel, 2. Mitt., Arb. aus d. biol. Reichsanst. **17**.
- Pauli, Wo., 1899, Die physikalischen Zustandsänderungen der Eiweißkörper, Pflügers Arch. **78**.
- 1902, Das Verhalten der Eiweißkörper gegen Elektrolyte, Beitr. zur chem. Physiol. und Pathol. **3**.
- 1920, Kolloidchemie der Eiweißkörper. Leipzig.
- Pauli, Wo. und Handowsky, H., 1909, Studien am Säureeiweiß, Biochem. Zeitschr. **18**.
- — 1910, Studien am Alkaleieiweiß, Biochem. Zeitschr. **24**.
- Trier, G., 1924, Chemie der Pflanzenstoffe.

TARTU ÜLIKOOLI BOTAANIKAMUUSEUMIST
JUHATAJA: PROF. DR. T. LIPPMAA KONSERVAATOR: K. EICHWALD
FROM THE BOTANICAL MUSEUM OF TARTU UNIVERSITY
DIRECTOR: PROF. DR. T. LIPPMAA CONSERVATOR: K. EICHWALD

EESTI TAIMED

T. LIPPMAA ja K. EICHWALD

II

(51—100)

WITH A SUMMARY:
ESTONIAN PLANTS

TARTU 1935

Ajavahemikus esimese ja käesoleva mapi ilmumise vahel on üks „Eesti taimede“ autoritest avaldanud töö, mis sisaldab Eesti taimegeograafilise liigestuse (T. Lippmaa, Eesti geobotaanika põhijooni, Acta et Comment. Univ. Tartuensis A XXVIII. 4 ja Acta Instit. et Horti Botan. Universit. Tartuensis vol. IV, fasc. 3—4). See liigestus on aluseks ka „Eesti taimede“ kaartidel ja tekstis.

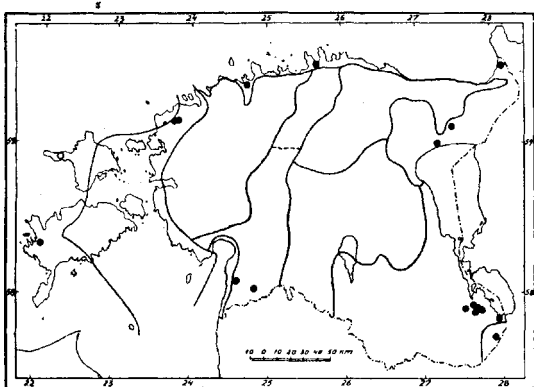
In the interval between the issue of the first file and the present, one of the authors of „Estonian Plants“ („Eesti Taimed“) has published a work containing the geobotanical division of Estonia (T. Lippmaa, Aperçu géobotanique de l'Estonie, Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis) A XXVIII. 4. and Acta Inst. et Horti Bot. Univ. Tartuensis Vol. IV, fasc. 3—4). This classification serves as basis for the presented distribution sketches of the various species.

Kaastöölised (collaborators): G. Avajev, J. Eplik, B. Fromhold-Treu, H. Hendrikson, stud. rer. nat. Selma Kaaber, stud. rer. nat. V. Knuut, dr. sc. nat. E. Lepik, Hilja Lippmaa, W. Loewis of Menar, P. Lukin, J. Lunts, G. Mechmershausen, dr. agr. A. Miljan, Th. Nenjukov †, Elsa Pastak, Juta Rebane, A. Reebe, dr. W. J. Reinthal, dr. rer. for. A. Rühl, dr. B. Saarsoo, dr. pharm. H. Salasoo, stud. rer. nat. L. Sepp, stud. pharm. V. Sirgo, stud. rer. nat. E. Sits, mag. bot. J. Talts, mag. bot. Sylvia Talts, dr. rer. nat. P. W. Thomson, agr. A. Tomson, mag. A. Vaga, E. Viirrok, dr. phil. G. Vilberg, Anna Vitsut, A. Üksip.

51. *Lycopodium inundatum* Linné. — Sookold.

Mandri piirdeosades ja saartel (E moc, Emor, Emb, Eint, Alt, Eor ja Esar) paiguti niisketel liivastel rabaservadel ja veeloikude

ümber, ajuti üleujutatavatel kohtadel, ka soorabades.



Estonia orientalis, Petserist põhjas, Lõuna-laagri polügoonil, teerööbastes niiskel liivase aluspinnaga nõmmel.

In the border-districts of the mainland and on the islands (E moc, Emor, Emb, Eint, Alt, Eor, Esar), on moist, sandy

margins of bogs and around pools, in places temporarily flooded, also in boggy swamps.

Estonia orientalis, N of Petseri in a moist heath with sandy subsoil in the wheel-tracks of an unfrequented road.

27. V. 1933.

leg. H. Salasoo.

51-a. *Lycopodium inundatum* Linné. — Sookold.

Estonia orientalis, Värskas lõunalaagrile kuuluva Tedresoo ääres teel rabastunud nõmmel.

Estonia orientalis, in a boggy heath in Tedresoo near Värskas, on a road.

20. VIII. 1933.

leg. Juta Rebane.

51-b. *Lycopodium inundatum* Linné. — Sookold.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk. Pidula maantee ääres, 5 km Kihelkonnalt, liivasel niiskel kohal u. 50 m² kogumikuna. Saatjad (Companions): *Equisetum variegatum*, *Agrostis canina*, *Juncus balticus*, *Carex Goodenowii*, *Ranunculus flammula*, *Drosera anglica*, *Linum catharticum*, *Mentha arvensis*, *Potentilla anserina*, *Leontodon autumnalis*.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, along the road of Pidula, 5 km off Kihelkonna, on a moist sandy tract as a colony of about 50 m².

8. IX. 1933.

leg. B. Saarsoo.

52. *Lycopodium annotinum* Linné. — Katekold.

Kogu alal niisketes kuuse- ja segametsades väga levinud, vahel ka kogumikkudena.

Estonia orientalis, Võnnu khk., Järveljast u. 3 km kirdes, Ülikooli õppemetskonnas, kuusemetsa all.

Widely distributed over the whole area in moist fir forests and mixed woods, sometimes in colonies.

Estonia orientalis, parish of Võnnu, about 3 km NE of Järvelja in a fir forest.

15. X. 1933.

leg. T. Lippmaa.

53. *Thesium ebracteatum* Hayne. — Katelehitu linalehik.

[*T. comosum* Roth.]

Pontilise flooraelemendi liik, omab relikttaimena Loode-Eestis (Einf) peaaereaalist eraldatud osaareaali, kasvades peamiselt transgressiooniala kergetel, lubjarikastel rühkmuldadel, sageli ka turbapinnasel; peamised asukohad on puisniidud, niidud ja rohtunud nõlvad, harvemini lood; sageli ka apofüüdina kultuurist tugevasti mõjustatud paikades.

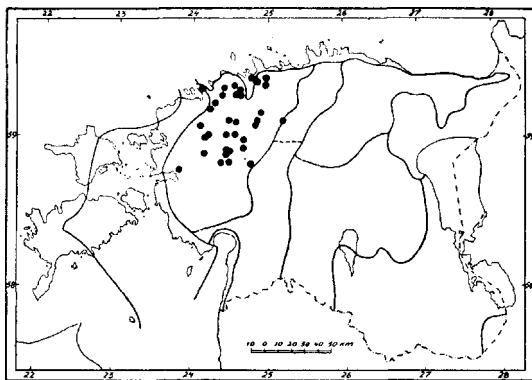
Estonia inferior, Keila khk., Pääsküla vöasael, turbapinnasega niidul. Osa taimi on infitseeritud nugeeseenest *Puccinia Passerini* Schroeter (det. dr. E. Lepik).

A pontic species, occupies as a relict plant an isolated distribution area in NW Estonia (Einf) where it grows generally on light, limy rihksoil of the „immerged region“, often also on moor-ground. It usually prefers woody meadows, and grassy hillsides, less often alvars; frequently as apophyte in places strongly influenced by culture.

Estonia inferior, parish of Keila, in a boggy meadow of Pääsküla in bushes. A part of the plants is infected by *Puccinia Passerini* Schroeter (det. dr. E. Lepik).

10. VI. 1933.

leg. A. Üksip.



53-a. *Thesium ebracteatum* Hayne. — Katelehitu linalehik.

[*T. comosum* Roth.]

Estonia inferior, Rapla khk., Lipstu küla Põldmaa talu heinamaal. Saatjad (Companions): *Nardus stricta*, *Hieracium pilosella*.

Estonia inferior, parish of Rapla, in a meadow near the village of Lipstu.

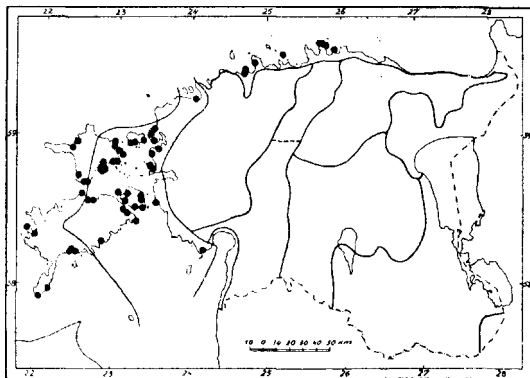
19. V. 1934.

leg. H. Hendrikson.

54. *Salicornia herbacea* Linné. — Soolarohi.

[*S. europaea herbacea* L.]

Saarte- ja mandri lääne- ja põhjarannikul (E m o c, E m o r, E m b), esineb saliinsel astmei koos *Suaeda maritima*'ga, randniitude savistel paljanditel, avauhingutes.



Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Kuusnõmme Loona lahe rannal, avauhingus mudasel pinnal. Saatjad (Companions): *Suaeda maritima*, *Spergularia salina*.

On the northern and western shores of the islands and the mainland in the saline belt, on bare clayey tracts of salt meadows, in associations with open growth together with *Suaeda maritima*.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, on the shores of the Loonalahe bay in Kuusnõmme on muddy soil.

2. IX. 1932.

leg. Juta Rebane.

54.a. *Salicornia herbacea* Linné. — Soolarohi.

[*S. europaea herbacea* L.]

Liigi kääbusvorm.

Estonia maritima orientalis, Käina khk., Vaemla, Posti lähedal randniidul, vähe kõrgemal alal.

The dwarf form of the species.

Estonia maritima orientalis, parish of Käina, Vaemla, near Posti in a salt meadow on a tract somewhat higher up than usual.

21. VIII. 1931.

leg. G. Vilberg.

55. *Caltha palustris* Linné. — Varsakabi, konnakapsas.

Kogu alal harilik niisketel niitudel ja puisniitudel, kraavides, jõe- ja oja kallastel, lodudes ja lodumetsades.

Estonia media, Türi juures märjal heinamaal, jõe kaldal.

Common in Estonia in moist or woody meadows, ditches, along banks of brooks and rivers, in swamps, marshes and marsh-woods.

Estonia media, near Türi in a wet meadow, on a river bank.

16. V. 1934.

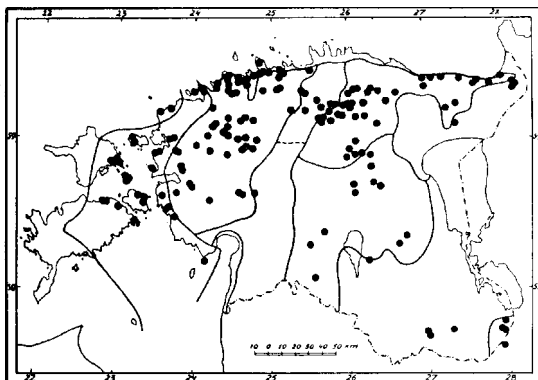
leg. Anna Vitsut.

56. *Anemone silvestris* L. var. *major* Janczewski. — Metsülane, kitsesilm.

Puudub saarte ja lääneranniku valdkonna suuremas osas. Levinud peamiselt mandri lubja- ja savipinnasega loodudel, kuivadel niitudel ja puisniitudel, paekaldal, lehtmetsades, oosidel.

Estonia inferior, Keila khk., Pääsküla lähedal lool.

Missing in most of Estonia maritima. Occurs mostly in limy and clayey regions of the mainland — on alvars, in dry or woody meadows, upon limestone cliffs on the northern coast of Estonia, in deciduous woods, on äses.



Estonia inferior, parish of Keila, on alvar near Pääsküla.

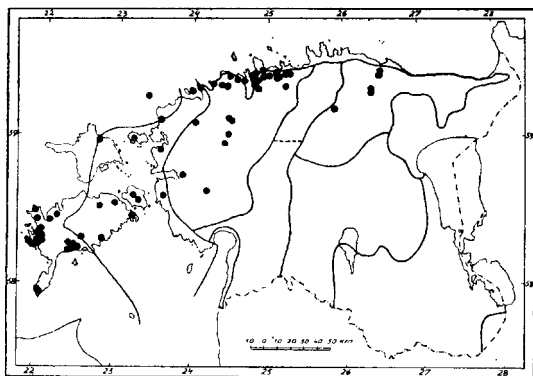
10. VI. 1933.

leg. A. Üksip.

57. *Braya supina* (L.) Koch. — Ussikapsas.

[*Sisymbrium supinum* Linné.]

Transgressiooniaala väljauhetud rühkpinnasel kohati sage lool, pac-murdudes, kallastel ja mererannal, eriti hulgi kuivaksjäävate ajutiste järvede asemel; vahel ka liivanurmedel ja prügi- ja umbrohi-taimena.



Estonia inferior, Hageri khk., kiriklast põhjas asuvate ajutiste karstijärvede kallastel, hulgi.

On the rihksoil of the „immersed region“, sporadically numerous in alvars, quarries, on banks and on the sea-

coast, particularly abundant on bottoms of temporary lakes already drying up; sometimes on sandy and gravelly ground as well as in waste places and as weed.

Estonia inferior, parish of Hageri, N of the church on the banks of temporary lakes, abundant.

15. VIII. 1921.

leg. P. W. Thomson.

58. *Sisymbrium officinale* (L.) Scop. var. *leiocarpum* De Candolle.
— Pärilaul.

Kogu alal teeservadel, umbrohi- ja prügitaimena. Käesolev teisend on vähem sage liigi tüübist (var. *typicum* Abromeit).

Estonia maritima borealis, Tallinna linnas, aias.

Throughout the area along roadsides as weed and in waste places. The variety at hand is more rare than the var. *typicum* Abromeit.

Estonia maritima borealis, in Tallinn, in a garden.

3.—10. VIII. 1934.

leg. Sylvia Talts.

59. *Capsella bursa pastoris* (L.) Medikus. — Hiirekõrv.

[*Thlaspi bursa pastoris* L.]

Tavaline prügitaim ja põldude, eriti paremate, umbrohi.

Estonia superior, Viru-Jaagupi khk., Põlula asunduse aias umbrohuna.

Common in waste places, and as weed in fields.

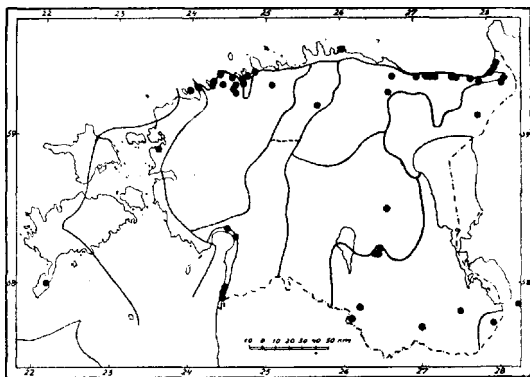
Estonia superior, parish of Viru-Jaagupi, as weed in a garden.

8. VII. 1934.

leg. G. Mechmershausen.

60. *Arabis arenosa* (L.) Scop. f. *albiflora* Reichenbach. —
Valgeõiene liiv-hanerohi.

[*Cardaminopsis arenosa* (L.) Hayek f. *albiflora* (Rchb.) Hegi;
Sisymbrium arenosum L. s. str.]



Liivastel aladel, luidetel, hõredates männimetsades, harva turbasel pinnal.

Estonia sarmatica, Irboska vana surnuaia alt ürgoru idanõlvalt.

On sandy soil, in sparse pine-woods on dunes, seldom on moor-ground.

Estonia sar-

matica, near the old cemetery of Irboska on the eastern slope of the valley.

29. V. 1933.

leg. Jutta Rebane.

teste O. E. Schultz.

61. *Arabis arenosa* (L.) Scop. f. *simplex* Neilreich. — Liiv-hanerohi.

[*Cardaminopsis arenosa* (L.) Hayek *α simplex* (Neilr.) Hayek;
Sisymbrium arenosum L. s. str.]

Liivastel aladel, hõredates männikutes.

Estonia orientalis, Rõngu khk., Elva alevist idas, Illi tee ääres, liival hulgi.

On sandy soil, in sparse pine-woods.

Estonia orientalis, parish of Rõngu, E of Elva, along the road of Illi, abundant on sand.

21. V. 1932.

leg. K. Eichwald.

61-a. *Arabis arenosa* (L.) Scop. f. *simplex* Neilreich. — Liiv-hanerohi.

[*Cardaminopsis arenosa* (L.) Hayek *α simplex* (Neilr.) Hayek;
Sisymbrium arenosum L. s. str.]

Estonia orientalis, Nõo khk., Vapramäe raudtee peatuskoha juurest heinamaalt.

Estonia orientalis, parish of Nõo, in a meadow near the Vapramäe railway station.

25. V. 1933.

leg. V. Sirgo.

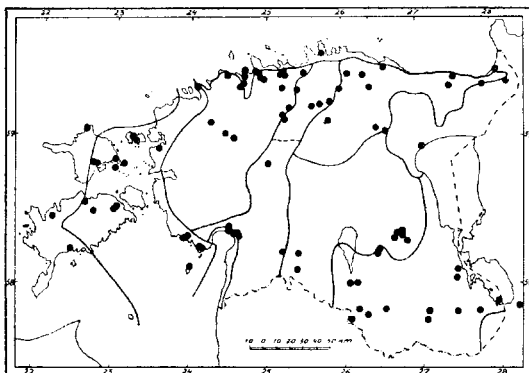
62. *Berteroa incana* (L.) De Candolle. — Kogelejarohi.

[*Alyssum incanum* Linné; *Farsetia incana* R. Brown.]

Antropohoorse liigina levimas kogu alal, eriti raudteede piirkonnas — raudteetammide nõlvadel, teeservadel, kinkudel, liivanurmedel, jäätmaadel: liivapinnasel ka põldumbrohuna.

Estonia media, Kambja khk., Haaslava lähedal liivasel jäätmaal.

As an anthropochore species it is spreading over the whole area, especially in the vicinity of railways — on the slopes of railroad embankments, along the roads, on hillocks, in



sandy fields and waste places; on sandy soil also as weed.

Estonia media, parish of Kambja, near Haaslava in a sandy fallow field.

VII. 1932.

leg. V. Sirgo.

63. *Parnassia palustris* Linné. — Ädal-lill.

Kogu alal soistel niisketel niitudel, puisniitudel ja lodudes; puudub kohati.

Estonia media, Emajõe lual Tartu lähedal, pillatult *Carex elata* ühinguš turbasel pinnal; pH 5,9. Saatjad (Companions): *Carex elata*, *C. lasiocarpa*, *Menyanthes trifoliata*, *Caltha palustris*, *Cardamine pratensis*.

Throughout the whole area in swampy moist meadows, woody meadows and marshes; not found in certain districts.

Estonia media, in a flood meadow of the river Emajõgi sporadically in the *Carex elata* association in peat-soil.

5. VIII. 1932.

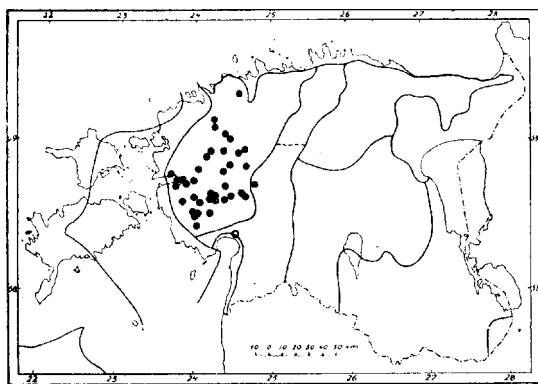
leg. V. Sirgo.

64. *Sanguisorba officinalis* Linné. — Harilik punanupp.

[*Poterium officinale* (L.) Benth et Hooker.]

Peaaegu eranditult Loode-Eesti valdkonna (Einf) niisketel, lubjarikastel puisniitudel ja niitudel.

Estonia inferior, Martna khk., Kasari luha niiskel, lubja-



kal niidul Laiküla jõe suudme lähedal, Suure-Rõude Aru-Mardi talust 0,5 km kagus. Saatjad (Companions): *Carex disticha*, *Agrostis vulgaris*, *Caltha palustris*, *Geum rivale*, *Comarum palustre*, *Filipendula ulmaria*, *Myosotis palustris*.

Almost exclusively in the NE part of Estonia in moist woody

meadows and meadows, on limy soil.

Estonia inferior, parish of Martna, on the moist limy flood meadows of Kasari near the mouth of the river Laiküla.

28. VI. 1933.

leg. E. Sits.

65. *Rubus chamaemorus* Linné. — Harilik murakas, kaarel.

Kogu alal harilik rabadel ja rabastuvates männimetsades.

Estonia maritima borealis, Tallinn, Nõmme lähedalt Valdeki rabast.

Common over the whole area in bogs and boggy pine-woods.

Estonia maritima borealis, Tallinn, near Nõmme in the bog of Valdeki.

25. V. ja 18. VIII. 1933.

leg. V. Sirgo.

66. *Rubus saxatilis* Linné. — Lillakas.

Kogu alal harilik kuuse-, sega- ja lodumetsades.

Estonia media, Tartu, Jänese lähedal niiske kuusemetsa all, hulgi.

Common over the whole area in fir forests, mixed woods and marsh-woods.

Estonia media, near Jänese in a moist fir forest, cop.

3. ja 29. VII. 1934.

leg. K. Eichwald.

67. *Rubus arcticus* Linné. — Soomurakas, mesimurakas.

Omab käesoleval ajal pidevama subreliktse iseloomuga levikuala Vahe-Eestis, Vändra ja Suure-Jaani khk. piiril, kus liigi eelistatud asukohtadeks on soised puisniidud ja niidud. Edasi on kogu alal rida ajutise iseloomuga leiukohti (+), kus taim lühema või pikema püsi järel on kadunud, ning teisi, enamikus vanemaid leiukohti, mida uuemal ajal ei ole sedastatud (o).

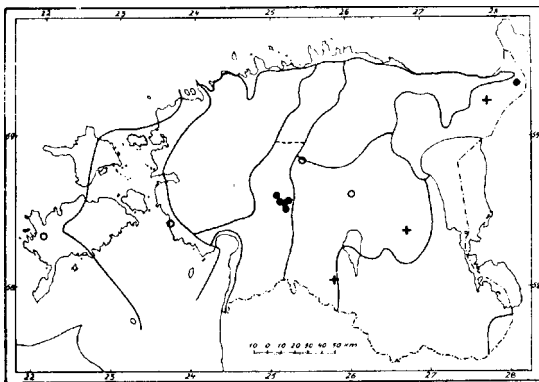
Estonia intermedia, Suure-Jaani khk., Kaansoo lähedal soises, rabastuvas männikus, kohati rohkesti. Saatjad (Companions): *Calamagrostis lanceolata*, *Peucedanum palustre*, *Vaccinium vitis idaea*, *Vaccinium myrtillus*, *Succisa pratensis*, *Sphagnum subbicolor*, *S. recurvum*.

Found at present in a more or less continuous distribution area as a subrelict in *Estonia intermedia* on the boundary of the parishes of Vändra and Suure-Jaani where it prefers swampy meadows and moist woody meadows. Further it is found here and there over the whole territory in places where the plant persists for some time and then disappears entirely (+). Certain occurrences referred to by older authors have not been verified in recent years (o).

Estonia intermedia, parish of Suure-Jaani, near Kaansoo in boggy, moist pine-wood, sporadically abundant.

5. VI. 1931.

leg. K. Eichwald.



**68. *Rubus arcticus* L. *lusus albiflorus* (Turcz. 1838) Focke. —
Valgeõiene soomurakas, v. mesimurakas.**

L. Laestadius'e poolt kirjeldatud valgeõiene var. *leuciticus* omab kroonlehtedest pikemaid tupplehti; käesoleval juhul on see ümberpöörduvalt — kroonlehed on pikemad ja õied üldse liigi tüübile vastavad. Kroonlehtede värv on peaaegu täiesti valge, veidi roosakate soontega.

Estonia intermedia, Suure-Jaani — Vändra khk., piiril, Pilliroo talu lähedal soises segametsas hõreda kogumikuna; samas Kargussaare talu lähedal salumetsa raiesmikul pillatult.

The white-flowered var. *leuciticus* described by L. Laestadius has sepals longer than petals. In the present case the relations are reverse: the petals are longer and the flowers correspond to the type. The petals are almost entirely white, only the veins are slightly pinkish.

Estonia intermedia, on the border of the parishes of Suure-Jaani and Vändra, near the Pilliroo farm in a swampy mixed wood as a sparse colony; at a short distance from the Kargussaare farm in a grove clearing, sporadic.

14.—15. VI. 1933.

leg. K. Eichwald.

69. *Rubus arcticus* L. \times *saxatilis* L.

[*R. castoreus* Laestadius.]

R. arcticus'e Eesti pealevikualal, Vändra — Suure-Jaani khk., kohati puisniitudel, kraavikallastel, eriti salumetsa vegetatsioonis, vahel hulgi, koos vanematega.

Estonia intermedia, Vändra khk., Suurejõe ja Kaansoo vahel Tammsaare talu võsasel puisniidul, ühel kohal kogumikuna.

In the main distribution area of *Rubus arcticus* in the parishes of Vändra and Suure-Jaani, in woody meadows, along ditches, but especially in grove vegetation, sometimes abundant together with *Rubus arcticus* and *R. saxatilis*.

Estonia intermedia, parish of Vändra, between Suurejõe and Kaansoo in a woody meadow of the Tammsaare farm as a colony.

13. VI. 1933.

leg. K. Eichwald.

70. *Trifolium fragiferum* Linné. — Randistikhein.

Nõrgalt halofüüt, Eestis vaid saartel ja harva mandri läänerannikul eriti salinise vöötme ülemises osas koos *Festuca rubra*, *Centaureum erythraea*, *Plantago maritima* jt.

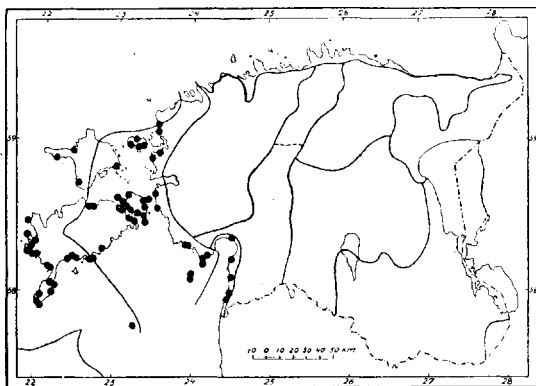
Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Austla külast lõunas asuva Rooparahu randniidul, kohati hulgi.

Feebly halophyte; in Estonia only on the islands and seldom on the western coast of the mainland, especially in the higher part of the saline belt together with *Festuca rubra*, *Centaureum erythraea*, *Plantago maritima* and others.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, in the salt meadow of Rooparahu south of the village of Austla, sporadically abundant.

16. VIII. 1933.

leg. B. Saarsoo.



70-a. *Trifolium fragiferum* Linné. — Randistikhein.

Litorale heademeesteense, Pärnu, mudaravila kohalt mereranna roostikust, pillatult.

Litorale heademeesteense, Pärnu, on the red-bank of the coast, sporadical.

7. VIII. 1933.

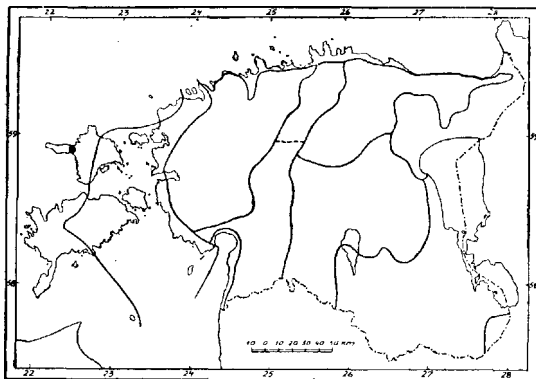
leg. V. Knuut.

71. *Radiola linoides* Roth. — Pisilina.

[*R. multiflora* Ascherson.]

Antud kohal, mis on taime Euroopa levikuala põhjapoolseimaks punktiks, leitud a. 1930.

Estonia maritima occidentalis, Reigi khk., Luidja küla



Haavalõuka talu tuuleveskist paarkümmend m põhja poole, luidete ja lepestiku vahelises lohus, karjamaal. Saatjad (Companions): *Carex Goodenowii*, *Festuca ovina*, *Agrostis vulgaris*, *Trifolium repens*, *Gentiana amarella* *axillaris, *Plantago maritima*, *Sagina nodosa*, *S. procumbens*, *Ranunculus acer*, *Mentha arvensis*, *Poten-*

tilla anserina, *Leontodon autumnalis*.

In the locality here mentioned, which is the northernmost occurrence of the plant in Europe, it was found in 1930.

Estonia maritima occidentalis, parish of Reigi, in the village of Luidja between dunes and shrubbery in a depression on a pasture.

12. VIII. 1931.

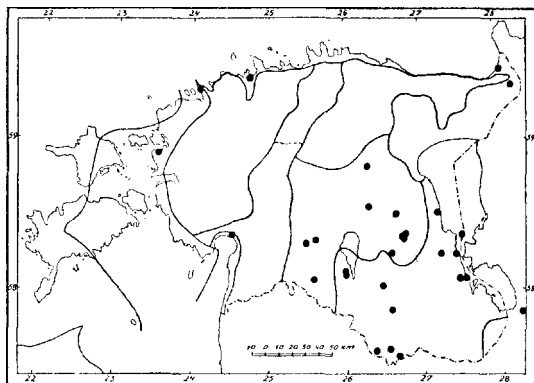
leg. G. Vilberg.

72. *Impatiens parviflora* Linné. — Väikeseõiene lemmalts.

1850. a. ümber Tartu botaanika-aiast levima hakanud; esineb käcsoleval ajal tulnukana peaaegu kõigis suuremais ja paljudes vähemais keskustes — aedades, varjukais parkides, elamute läheduses, harvemini ka inimeste elamutest kaugemal ojakallastel.

Estonia media, Tartu, Toomimäel, N nõlval haavakliiniku taga, vahtrate ja pärnade all, hulgi.

About 1850, it began to spread from the Tartu Botanical Garden and



is nowadays to be found in nearly all the larger as well as many of the smaller centres — in gardens, shady parks, near human settlements, less frequently at some distance from human settlements along banks of brooks.

Estonia media, Tartu, on the northern slope of Toomimägi under maples

and lime-trees, abundant.

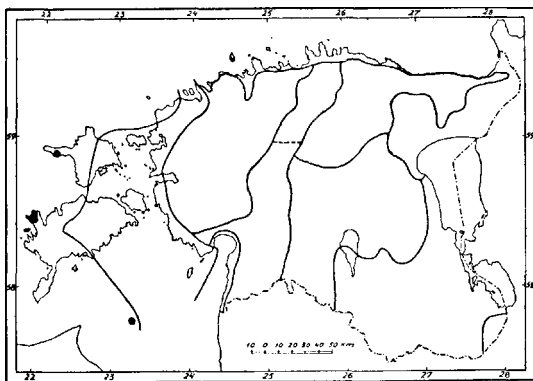
8. IX. 1933.

leg. Elsa Pastak.

73. *Hydrocotyle vulgaris* Linné. — Vesipaunikas.

Saarte lääneosas ning Ruhnu (E m o c) märke ja soisel pinnasel, sageli varjuka metsa all samblal, harilikult hulgi.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Harilaiust idas asuva Sarapiku (Kogre) järve kaldalt.



In the western parts of the islands and on the island of Ruhnu on wet and swampy ground, often in shady woods on mosses, usually abundant.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, on the banks of Lake Sarapiku (Kogre), east of Harilaid.

16. ja 21. VII. 1933.

leg. Elsa Pastak ja K. Eichwald.

73-a. *Hydrocotyle vulgaris* Linné. — Vesipaunikas.

Estonia maritima occidentalis, Ruhnu saar, Austerengi heinamaa põhjaserval asuva lodu ääres, kohati hulgi.

Estonia maritima occidentalis, the island of Ruhnu, on the border of a marsh in a meadow at Austerengi, sporadically abundant.

22. VII. 1932.

leg. G. Vilberg.

74. *Chaerophyllum aromaticum* Linné var. *longipilum* Thellung. — Lõhnav varesputk e. lõhnav koerakõõmen.

Eesti mandril kohati varjukais sarapikes, lepikuis, kaldavõsastikes ja lehtmetsa-saludes.

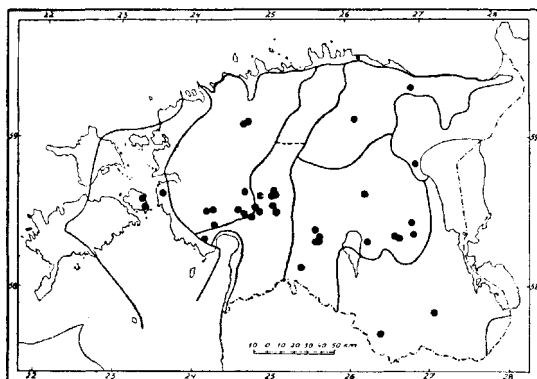
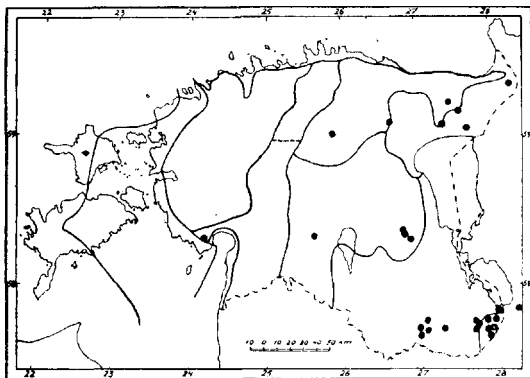
Estonia media, Viljandi lähedal Uueveski orus, niiskes võsastikus.

On the mainland sporadically in shady hazel-woods, groves, alder-bushes and shrubberies along banks.

Estonia media, near Viljandi in the valley of Uueveski, in a moist shrubbery.

2. VIII. 1933.

leg. W. J. Reinthal.



75. *Pimpinella major* (L.) Hudson var. *vulgaris* (Moritzi) Thellung. — Suur näär.

[*P. magna* subsp. *vulgaris* Gaudin.]

Puisniitudel, jõgede ja ojade äärses võsastikes.

Estonia media, Viljandi lähedal, Kleinhofi niiskes lehtmetsas.

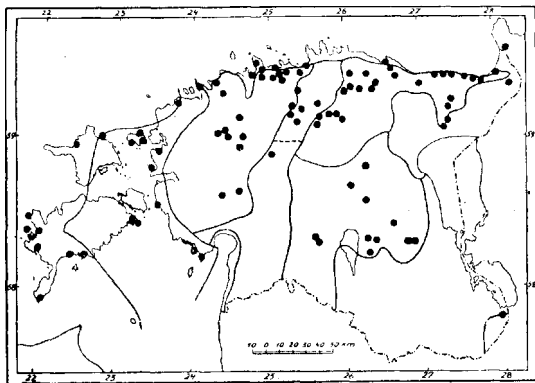
In woody meadows and in shrubberies along banks of brooks and rivers.

Estonia media, near Viljandi in Kleinhofi in a moist grove.
29. VII. 1933. leg. W. J. Reinthal.

76. *Seseli libanotis* (L.) Koch subsp. *eu-libanotis* Thellung. — Harilik põdrajuur.

[*Athamanta libanotis* L. s. str.; *Libanotis montana* auct. s. str.]

Kinkudel, nõlvadel, teeservadel, kuivadel niitudel, eriti mandri põhjaosas; Lõuna-Eestis lubjarikkamail moreenialadel.



Estonia media, Viljandi lähedal, kuival „Köstiveski“ rohtunud kingul.

On hillocks, hill-sides, along roadsides, in dry meadows, especially in the northern part of the mainland; in southern Estonia in moraine districts rich in lime.

Estonia media, near Viljandi on the slopes of a dry

grassy hillock named Köstiveski.
20. VII. 1933.

leg. W. J. Reinthal.

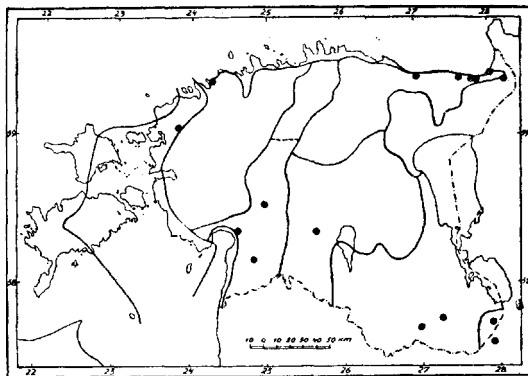
77. *Conioselinum vaginatum* (Sprengel) Thellung. — Putk-köömen.
[*C. tataricum* Fischer, *C. Fischeri* Wimmer et Grab.]

Eesti mandril ojaäärseis kaldavõsastikes, varjukates uhtlamm-metsades, sageli koos *Alnus incana*ga.

Estonia media, Viljandi lähedal „Köstiveski“ oja ääres lepikus.

On the mainland in thickets along the banks of brooks, in shady riverside woods, often together with *Alnus incana*.

Estonia media, near Viljandi, on the banks of the Köstiveski brook in alder-bushes.
25. VII. 1933.



leg. W. J. Reinthal.

78. *Ledum palustre* Linné. — Kail, sookail.

Kogu alal rabades ja soorabades mätastel; moodustab rabastuvates männimetsades ning rabade servaosades sageli suuri *Ledum palustre* ühingu kogumikke.

Estonia media, Äksi khk., Sootaga Pupastvere küla juures asuva raba serval männikus, Kalli talu kohal. Saatjad (Companions): *Pinus silvestris*, *Calluna vulgaris*, *Rubus chamaemorus*, *Vaccinium vitis idaea*, *Vaccinium uliginosum*, *Empetrum nigrum*, *Andromeda polifolia*, *Betula nana*, *Eriophorum vaginatum*, *Sphagnum* sp.

Over the whole area in peat-bogs and boggy swamps; in moory pine-woods and on borders of bogs, it often forms large colonies (*Ledum palustre* association).

Estonia media, parish of Äksi, in a pine-wood near the bog of Pupastvere.

11. VI. 1930.

leg. H. Salasoo.

79. *Chamaedaphne calyculata* (L.) Moench. — Hanevits.

[*Lyonia calyculata* Rchb., *Andromeda c. L.*, *Cassandra c. Don*:]

Puudub Eesti lääneosas, omades seega ida kontinentaalse liigi iseloomu; esineb eriti mandri idaosas sageli massiliselt rabastuvates männimetsades, rabadel ja rabaservadel.

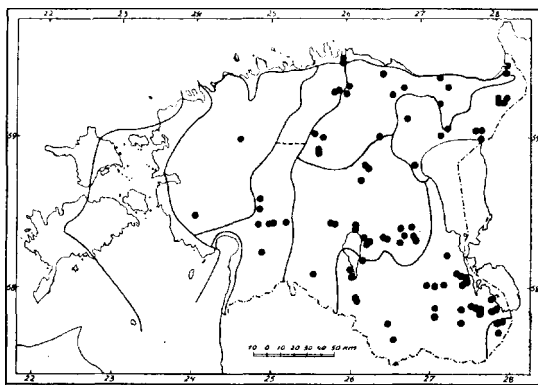
Estonia media, Äksi khk., Pupastvere rabas. Saatjad (Companions): *Andromeda polifolia*, *Empetrum nigrum*, *Oxycoccus palustris*, *Ledum palustre*, *Betula nana*.

Lacking in the western parts of Estonia; has the character of an eastern continental element; to be found particularly in the eastern part of the territory, often in great quantities, in boggy pine-woods, peat-bogs, on the borders of bogs, and swampy bogs.

Estonia media, parish of Äksi, in the bog of Pupastvere.

14. V. 1931.

leg. H. Salasoo.



80. *Arctostaphylos uva ursi* (L.) Sprengel. — Leesikas, seapohl.

[*Arbutus uva ursi* L.]

Kogu alal kuivades, hõredates liivastes männikutes, siseluidetel, nõmmedel, harilikult vaibandeid moodustades, eriti peale rohurinde hävimist metsapõlemise tagajärjel.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Viidu kohal Saaremaa keskkõrgendiku nõlval männimetsas.

Over the whole area in dry, sandy sparse pine-woods as well as on inland dunes and heaths usually in patches, especially after the destruction of the grass-layer by fire.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, near Viidu in a pine-wood.

28. V. 1933.

leg. B. Saarsoo.

80-a. *Arctostaphylos uva ursi* (L.) Sprengel. — Leesikas, seapohl.

[*Arbutus uva ursi* L.]

Estonia maritima borealis, Keila khk., Nõmme ümbruses Valdeki raba kohal männimetsas.

Estonia maritima borealis, parish of Keila, in the neighbourhood of Nõmme, in a pine-wood near the bog of Valdeki.

15. VI. 1933.

leg. V. Sirgo.

81. *Vaccinium myrtillus* Linné. — Mustikas.

[*Myrtillus nigra* Gilibert.]

Kogu alal väga harilik eriti niiskemais kuusemetsades, kuuse-segametsades ja männimetsades, kus sageli esineb rohurindes valitseva liigina.

Estonia media, Tartu ligidal Tähtvere metsa serval. Saatjad (Companions): *Luzula pilosa*, *Andromeda polifolia*, *Vaccinium uliginosum*, *Tricentulus europaea* jt.

Very common over the whole area, especially in moist fir-forests, fir-mixed woods and pine-woods, where it often predominates in the grass-layer.

Estonia media, near Tartu, on the skirts of the Tähtvere wood.

29. V. 1933.

leg. H. Salasoo.

82. *Vaccinium uliginosum* Linné. — Sinikas, joovikas.

Kogu alal, eriti rabastuvates ja turbapinnasega männimetsades, paiguti ka kuusemetsades ja kuuse-segametsades ning rabastuvates soodes ja rabaservadel.

Estonia media, Äksi khk., Pupastvere raba serval. Saatjad (Companions): *Ledum palustre*, *Rubus chamaemorus*, *Andromeda polifolia*, *Chamaedaphne calyculata*, *Carex chordorrhiza*, *Betula nana*, *Eriophorum vaginatum* jt.

Over the whole area, especially in boggy pine-woods on turf-ground, sometimes also in fir-forests and fir-mixed woods, in boggy swamps and on the margins of bogs.

Estonia media, parish of Äksi, on the edge of the Pupastvere bog.

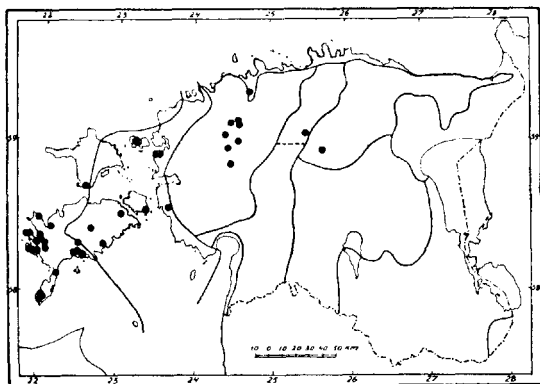
11. VI. 1933.

leg. H. Salasoo.

**83. *Teucrium scordium* L. subsp. *palustre* (Lam.) Gams. —
Lõhnav tarinõges.**

[*Teucrium palustre* L a m a r c k.]

Lääneosa lubjaaladel kraavides, niitudel, randniitudel, sageli hulgi hõredas taimkattes, ka ajutiste üleujutuste piirkondades.



Estonia inferior, Hageri khk., oja kaldal, üleujutataval alal.

In the lime-district of the western part of the area in ditches, meadows, frequently abundant in sparse vegetation, also in places temporarily flooded.

Estonia inferior, parish of Hageri, on the flooded banks of a brook.

15. VIII. 1921.

leg. P. W. Thomson.

**83-a. *Teucrium scordium* L. subsp. *palustre* (Lam.) Gams.
— Lõhnav tarinõges.**

[*Teucrium palustre* L a m a r c k.]

Estonia inferior, Rapla khk., Ohukotsu asundus, Hiienurme talu luhal, kohati kogumikuna. Saatjad (Companions): *Carex Oederi*, *Carex disticha*, *Mentha arvensis*, *Galium palustre*, *Equisetum palustre*.

Estonia inferior, parish of Rapla, Ohukotsu, on a meadow of the Hiienurme farm in colonies.

17. VIII. 1934.

leg. H. Hendrikson.

**84. *Glechoma hederacea* L. subsp. *glabriusculum* (Neilr.) Gams.
— Maajalg, kassiratas.**

[*Glechoma hederacea* L., *Nepeta glechoma* B e n t h a m].

Kogu alal väga harilik niitudel, puisniitudel, võsastikes, jõe- ja oja-kallastel, teeservadel, aedade ääres.

Estonia media, Tartu lähedal Tähtvere väljal, koos *Viola arvensis*'ega.

Common throughout the whole area in meadows, woody meadows, shrubberies, on banks of brooks and rivers, along roadsides, by fences.

Estonia media, Tähtvere near Tartu, together with *Viola arvensis*.

23. V. 1931.

leg. V. Sirgo.

**85. *Rhinanthus major* Ehrh. var. *agrarius* (Semler) Soó. —
Põld-robihein.**

[*Alectorolophus agrarius* Semler, *A. major* (Ehrh.) Rechb. subsp. *agrarius* Semler = subsp. *major* (Ehrh.) Hayek f. *agrarius* (Semler) Hayek.]

Seni Saaremaa lääneosas leitud, esineb paiguti massilise rukkiumbrohuna. C. Semler'i kriitiline märkus, v. allpool; käesoleva teisendi kohta vrd. ka Th. Nenjukov, T. Ü. j. o. Loodusuurijate Seltsi aruanded XXXIV, 2 (1927), lk. 155.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Kihelkonna lähedal rukkipõllul umbrohuna.

Up till now found sporadically in great quantities in the western part of Saaremaa as weed in rye-fields. C. Semler makes the following brief critical remark: „auf der Insel Ösel (Saaremaa) hätte ich unbedingt *Alectorolophus apterus* (= *Rh. apterus*) vermutet und bin erstaunt, von dort *Al. agrarius* zu sehen. Allerdings zeigen die estländischen Samen etwas andere Beschaffenheit: sie sind viel schmaler geflügelt als bei uns, in Bayern“. Also Th. Nenjukov, T. Ü. j. o. Loodusuurijate Seltsi aruanded XXXIV, 2 (1927), p. 155.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, as weed in a rye-field.

13. VII. 1933.

leg. A. Üksip.

det. Th. Nenjukov, teste C. Semler.

**86. *Rhinanthus rumelicus* Velen. subsp. *osiliensis* Ronniger
et Saarsoo. — Saaremaa robihein.**

Käesolev *Rh. rumelicus*'e [= *Alectorolophus rumelicus* (Vel.) Borbás] uus rass Saaremaalt, mille originaaldiagnoos (v. allpool) K. Ronniger'ilt ilmus: Fedde, Repertorium specierum novarum regni vegetabilis, XXXV, on Ronniger'i järgi kõige lähedam sama liigi alaliigile *Simonkaianus* Soó. Väga põhjendatult peab C. Semler (kirjalikult, v. allpool) teda lähedaks alaliigile *abbreviatus* Soó [*Alectorolophus abbreviatus* (Murb.) Maly; *A. rumelicus* subsp. *abbreviatus* Maly].

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Lümanda Suurisscos, Sutru metsa ääres, allikarikastel kohtadel *Schoenus ferrugineus* — *Pinguicula alpina* ühingus. Saatjad (Companions): *Equisetum palustre*, *Carex Davalliana*, *Carex limosa*, *Carex dioeca*, *Schoenus ferrugineus* × *nigricans*, *Eriophorum latifolium*, *Sesleria *uliginosa*, *Molinia coerulea*, *Briza media*, *Phragmites communis*, *Juncus subnodulosus*, *Tofieldia calyculata*, *Orchis incarnatus*, *Orchis Traunsteineri*, *Helleborine palustris*, *Gymnadenia odoratissima*, *Centaurium erythraea*, *Menyanthes trifoliata*, *Drosera anglica*, *Linum catharticum*, *Parnassia palustris*, *Primula farinosa*, *Potentilla erecta*, *Pedicularis palustris*, *Succisa pratensis*.

The present *Rhinanthus rumelicus* [= *Alectorolophus rumelicus* (Vel.) Borbás] is a new race found in Saaremaa. The original diagnosis was made by K. Ronniger in: Fedde, Repertorium specierum

novarum regni vegetabilis, XXXV: „Caulis 20—50 cm altus, nigro-violaceo-lineolatus, ab ima basi usque ad apicem glanduloso-pilosus; pili glanduliferi pluricellulares, longi, basin versus laxe, apicem versus dense dispositi. Ramorum paria 2—5 (rarissime tantum singula vel 6—9), brevia, 1—10 cm tantum longa, plerumque sterilia, sed nunquam deficientia. Internodia numerosa, basin caulis versus foliis breviora, apicem versus iis aequilonga vel longiora. Folia caulina angustissima, 3—4 mm lata (rarissime 2 vel 5 mm), utrinque dense glandulosa, imprimis margine et subtus ad nervum medianum praeterea setulis brevibus adspersa. Foliorum intercalarium paria 1—3 (rarissime 0 vel 4). Bractee 8—10 mm latae, inferiores subregulariter, superiores valde irregulariter dentatae. Dentes inferiores bractearum superiorum latitudine duplo longiores, saepe in aristam brevem protracti. Bractee utrinque glandulis stipitatis et setulis brevibus adspersae. Calyx omnino pilis glanduliferis, margine insuper setulis obtectus. Corolla dense breviter glanduloso-puberula. Flores infimi nodo 16. — 20. (rarissime 12. — 15. vel 21. — 24.) insidentes“. According to the above author, it is most closely related to the subsp. *Simonkaianus* Soó. C. Semler has good reasons to consider it more akin to the subsp. *abbreviatus* Soó [= *Alectrolophus abbreviatus* (Murb.) Maly; *A. rumelicus* subsp. *abbreviatus* Maly]. C. Semler writes: „zahlreiche, gedrängte Internodien, relativ reich verzweigt, öfter mehre Interkalarblattpaare, schmale Blätter, spätere Blütezeit“.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, in Suurissoo near Lümanda, close by the Sutrumets wood, on tracts abounding in springs in the *Schoenus ferrugineus* — *Pinguicula alpina* association.

30. VII. ja 20. VIII. 1933.

leg. B. Saarsoo.

87. *Pinguicula vulgaris* Linné. — Harilik võipätakas, libeleht.

Kogu alal enam-vähem lubjapinnasega niisketel kuni soistel niitudel ja puisniitudel.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Kuusnõmme — Atla tee ääres niiskes rannalähedases männikus.

Over the whole area on more or less calcareous ground in moist and swampy or woody meadows.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, along the road of Kuusnõmme — Atla in a moist pine-wood near the sea-coast.

20. VI. 1932.

leg. Elsa Pastak.

88. *Pinguicula alpina* Linné. — Alpi võipätakas.

[*P. brachyloba* Ledebour.]

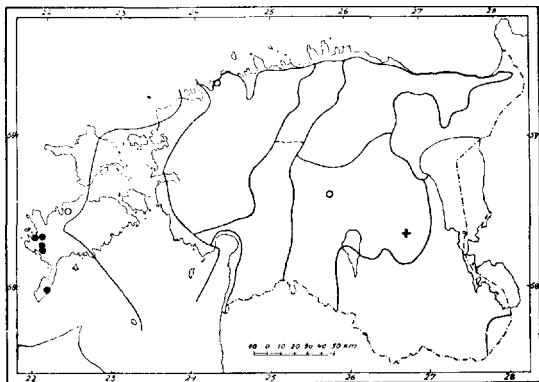
Käesoleval ajal esineb vaid Saaremaa lääneosas lubjarikastel alliksoodel, harilikult hulgi *Schoenus ferrugineus*'e ühingus. Eestis esmakordselt leitud Tähtvere asunduse kohalt Tartu lähedal (German 1806),

kus liik püsis kuni ala kultiveerimiseni a. 1892 (+). — Mandrilt mõned vanemad leiukohaandmed, mille tõendusmaterjal puudub (O).

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., Kuusnõmme Bioloogiajaamast kirdes asuvas soos, hulgi.

Nowadays found only in the western part of Saaremaa in calcareous

swamps abounding in springs, usually abundant in the *Schoenus ferrugineus* association. Was observed for the first time in Estonia in Tähtvere near Tartu (German 1806), where it persisted till the place was cultivated in 1922 (+). — There are some older data regarding the mainland, but the material to verify them is lacking (O).



Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, NE of the Biological Station of Kuusnõmme in a swamp, abundant.

6. VI. 1932.

leg. Jutta Rebane.

89. *Lonicera coerulea* L. var. *altaica* Sweet. — Taevassinine kuslapuu, portsamari.

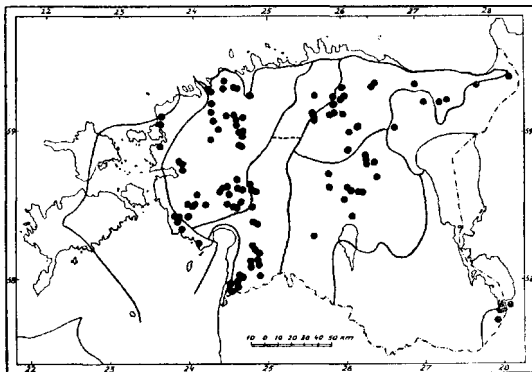
[*L. altaica* Pallas p. p.; *L. Pallasii* Ledebour.]

Mandri lubjarikkamail aladel, eriti läänesosas niisketel puisniitudel, sega- ja lodumetsades.

Estonia sarmatica, Petseri-Irboska raudtee ääres, Liivamäe ja Vilo peatuskoha vahel.

On the mainland, in districts with calcareous subsoil, especially in the western parts in moist woody meadows, mixed woods and marshy woods.

Estonia sarmatica, along the Petseri-Irboska railway line, between the stations of Liivamäe and Vilo.



29. V. 1933.

leg. A. Vaga.

90. *Campanula persicifolia* L. — Suureõiene kellukas, kurekatel.

Varieeruv liik; käesolev materjal koosneb kolmest vormist: suurem osa on *f. levicaulis* (Beck), vars ja lehed paljad; üksikud *f. hispida* (Lej.) Beck — alumised lehed ja varre alumine osa lühikarvased; osa *f. dasycarpa* Kit. (var. *eriocarpa* Mert. et Koch) — tupp valgekarvane.

Sage peaaegu kogu alal — loodudel, kuivadel puisniitudel, arudel, metsades ja metsaservadel.

Estonia intermedia, Ambla khk., Jäneda lähedal segametsas.

A varying species; the material at hand consists of three forms: most of it represents *f. levicaulis* (Beck), with glabrous stalk and leaves; some specimens are *f. hispida* (Lej.) Beck, the lower leaves and the lower part of the stalk being pubescent; one part is *f. dasycarpa* Kit. (var. *eriocarpa* Mert. et Koch), the calyx of this form being pubescent.

Frequent almost over the whole territory — in alvars, meadows, woods and on skirts of woods.

Estonia intermedia, parish of Ambla, in mixed wood near Jäneda.

18. VIII. 1933.

leg. A. Miljan.

91. *Antennaria dioeca* (L.) Gaertner *f. borealis* Camus. — Kassikäpp.

[= *f. hyperborea* G. Don; *Gnaphalium dioecum* Linné.]

Kogu alal väga harilik liiva-, savi- ja rühapinnasega kuivadel kinkudel, puisniitudel, karjamaadel, teeservadel, männikutes. Eriti ohtralt loodudel, kus sageli esineb ka enam-vähem suurte puhtate laikudena.

Estonia inferior, Nissi khk., Riisipere raudteejaamast kirdes asuva männiku hõredamail kohtadel, laiguti.

Very common over the whole territory on dry hillocks, in woody meadows, in pastures along roadsides, in pine woods, on sand, clay and rihksoil. Especially abundant on alvars where it often occurs in fairly large clean patches.

Estonia inferior, parish of Nissi, in a pine-wood NE of the Riisipere station.

5. VII. 1933.

leg. L. Sepp.

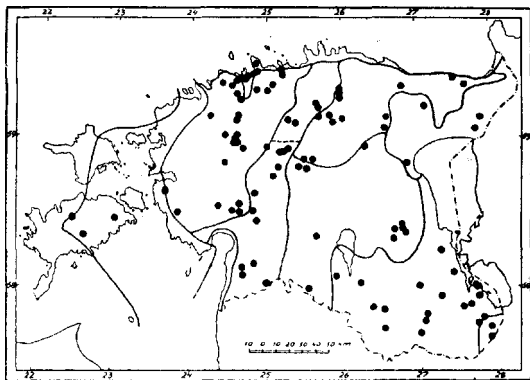
92. *Centaurea phrygia* L. subsp. *austriaca* (Willd.) Gugler. — Austria jumikas.

[*C. austriaca* Willd.; *C. phrygia* L. Fl. Suec.]

Aasadel, niitudel, puisniitudel, metsaservadel ja kuuse-segametsa raieksikudel, eriti oosidel, kohati hulgi.

Estonia inferior, Ambla khk., Anisti asunduse juures, Jäneda-Vulbi vallseljaku lõpul. Saatjad (Companions): *Betula verrucosa*, *Populus tremula*, *Pinus silvestris*, *Calamagrostis arundinacea*, *Calamagrostis epigeios*, *Melica nutans*, *Melampyrum nemorosum*, *Geranium sanguineum*,

Lathyrus pisiformis, *Convallaria majalis*, *Solidago virga aurea*, *Trifolium montanum*, *Helianthemum vulgare*.



In meadows, woody meadows, on skirts of woods and clearings of fir mixed woods, especially on âses, sporadically abundant.

Estonia inferior, parish of Ambla, near Anisti at the âs of Jäneda-Vulbi.

12. VIII. 1934.

leg. J. Lunts.

93. *Setaria viridis* (L.) P. Beauv. var. *reclinata* (Vill.) Volkart.
— Roheline kukeleib.

Antropohoorse liigina kohati prügil, teeservadel, aedades, liivastel põldudel umbrohuna.

Estonia orientalis, Võnnu khk., Järvelja põllul, Tartu Ülikooli õppemetskonnas.

As an anthropochore species sporadically in waste ground, along roadsides, in gardens, as weed in sandy fields.

Estonia orientalis, parish of Võnnu, in Järvelja in a field.

29. VII. 1933.

leg. E. Lepik.

93-a. *Setaria viridis* (L.) P. Beauv. var. *reclinata* (Vill.) Volkart.
— Roheline kukeleib.

Estonia orientalis, Otepää khk., Päidla, Husa talu liivasel odrapõllul, rohkesti.

Estonia orientalis, parish of Otepää, Päidla, in a sandy corn-field, abundantly.

7. VIII. 1934.

leg. K. Eichwald.

94. *Milium effusum* Linné. — Mets-kukeleib.

Kohati sage varjukais, huumusrikkais kuuse- ja segametsades, eriti *Hepatica triloba* — *Pulmonaria officinalis*'e ühingus.

Estonia orientalis, Võnnu khk. Kastre-Peravald, Tartu ülikooli õppemetskonna segametsas.

Sporadically frequent in shady fir-forests and mixed woods, especially in the *Hepatica triloba* — *Pulmonaria officinalis* association.

Estonia orientalis, parish of Võnnu, in the mixed wood at Kastre-Peravalla.

19. VI. 1931.

leg. E. Lepik.

95. *Koeleria glauca* (Schkuhr) De Candolle. — Vesihaljas haguhein.

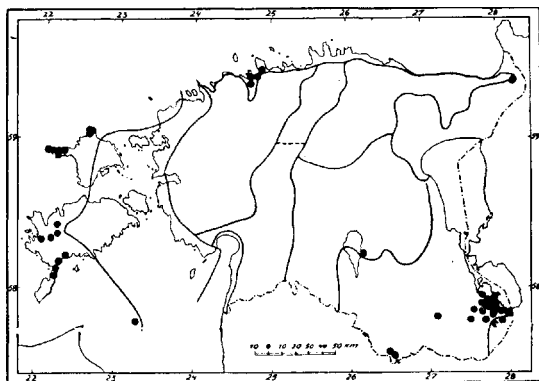
[*Poa glauca* Schkuhr.]

Omab mitut võrdlemisi isoleeritud levikuala rannikuil ja mandri kaguosas, kus esineb luidetel, liivanurmedel ja kuivades liivastes männimetsades. Käesolev, eriti pöörispeade värvilt varieeruv materjal on väga lähedane selle liigi teisendile *intermedia* (Ahlquist) Fries, mis on tüüpiline luitevorm, kuid üleminekutega seoses ka sisemaa vormidega [vrd. O. Holmberg, Skandinaaviens flora, Häfte 2, 172 (1926)].

Estonia maritima occidentalis, Anseküla khk., Järve luidetel hulgi *Festuca polesica* ühingus, koos *Dianthus arenarius*'ega.

Occurs in many relatively isolated distribution areas on the coast and in the south-eastern

part of the mainland where it is to be found on dunes, on sandy ground and in dry sandy pine-woods. The material at hand which varies considerably, especially as regards the colour of the panicles, is closely related to the var. *intermedia* (Ahlquist) Fries of this species, which is typical of dunes. Our material



resembles in different ways certain mainland forms. [To compare: O. Holmberg, Skandinaaviens flora, Häfte 2, 172. (1926).]

Estonia maritima occidentalis, parish of Anseküla, abundant on the dunes of Järve in the *Festuca polesica* association together with *Dianthus arenarius*.

27. VI. 1933.

leg. A. Tomson.

96. *Eriophorum polystachyum* Linné. — Ahtalehine villpea.

[*E. polystachion* α L., *E. angustifolium* Roth.]

Kogu alal harilik ning sageli hulgi kraavides, soodes, niisketel niitudel ning puisniitudel, ka lodudes.

Estonia inferior, Keila khk., Saue lähedal ajutistes, suvel kuivavates lompides, lubjapinnasel.

Common throughout the whole area and often abundant in ditches, swamps, moist or woody meadows and marshes.

Estonia inferior, parish of Keila, on calcareous soil near Saue, in pools drying up in summer.

29. V. ja 16. VI. 1933.

leg. A. Üksip.

97. *Paris quadrifolia* Linné. — Ussilakk, hooramari.

[*Paris quadrifolius* L.]

Kogu alal harilik lehtmetsades, kuuse-segametsades, kuuselodudes, võsastikes; harvem puisniitude varjukamais kohtades. Kuulub *Hepatica triloba* — *Pulmonaria officinalis*'e ühingu ja *Carex loliacea* (tenella) — *Crepis paludosa* ühingu kaaslaste hulka.

Litorale heademeesteense, Pärnu linna lähedal puisniidul, põõsaste ümber, hulgi.

Common throughout the whole area in deciduous woods, mixed fir-forest, fir-marshes, thickets; rarer in shady places in woody meadows. Is one of the companions of the *Hepatica triloba* — *Pulmonaria officinalis* and *Carex loliacea* (tenella) — *Crepis paludosa* associations.

Litorale heademeesteense, near Pärnu in a woody meadow around bushes.

13. VI. 1933.

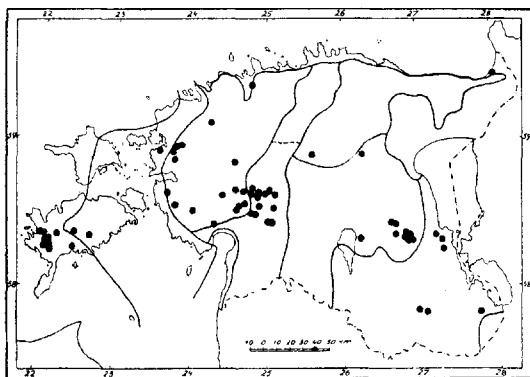
leg. V. Knuut.

98. *Iris sibirica* Linné. — Siberi võhumõõk.

Enam-vähem rühmituvad leiukohad kogu alal; kasvab üksikult kuni hulgi niisketel niitudel ja puisniitudel, sooheinamaadel.

Estonia orientalis, Võnnu khk., Kalli järve ääres Haabsaare soosaarel. Saatjad (Companions):

Betula pubescens, *Salix rosmarinifolia*, *Gentiana pneumonanthe*, *Scorzonera humilis*, *Cnidium venosum*, *Inula britannica*, *Achillea cartilaginea*, *Filipendula ulmaria*, *Mentha arvensis*, *Lysimachia vulgaris*.
Huumuse pH 5,0.



More or less sporadic occurrences over the whole area; it grows singly or abundantly in moist meadows, woody meadows and swampy meadows.

Estonia orientalis, parish of Võnnu, near Lake Kalli on the moor-island of Haabsaare.

6. VII. 1931.

leg. V. Sirgo.

99. *Ophrys muscifera* Hudson. — Kärbesõis.

[*O. insectifera* α *myodes* L., *O. myodes* Jacquin.]

Eriti siluuri alal lääneosas (Emoc, Emor, Einf) lubjarikastel niisketel puisniitudel ja lubjarikastes soodes ja allikasoodes, sageli hulgi.

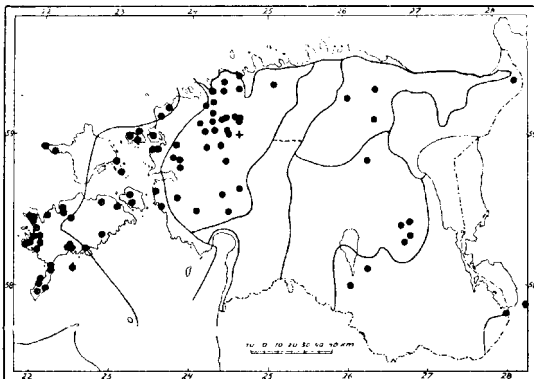
Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk., puisniidul Himmiste külast läänes.

Mainly in the western part of the Silurian lime-district (Emoc, Emor, Einf) in moist woody meadows and swamps on calcareous soil, as well as in swamps that abound in springs, often abundant.

Estonia maritima occidentalis, parish of Kihelkonna, in a woody meadow of the village of Himmiste.

4. VII. 1933.

leg. B. Saarsoo.



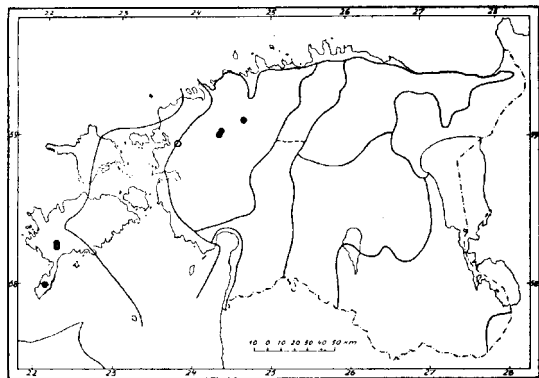
100. *Gymnadenia odoratissima* (L.) L. C. Richard. — Lõhnav käoraamat.

[*Orchis odoratissimus* L., *Satyrium odoratissimum* Wahlenbg.]

Euroopa montaanse elemendi liik, esineb haruldusena Eesti lääneosas (Emoc, Einf) alliksoodel, soistel puisniitudel, mõnikord ka kuivadel arudel, vahel hulgi.

Estonia maritima occidentalis, Kihelkonna khk.,

Sutru metsa ääres Lümamanda Suurissoos, Saaremaa kesk-kõrgendiku allikarikkal läänejalamil. Saatjad (Companions): *Sesleria *uliginosa*, *Molinia coerulea*, *Eriophorum latifolium*, *Schoenus ferrugineus*, *S. ferrugineus* × *nigricans*, *Carex dioeca*, *Carex limosa*, *Carex Davalliana*, *Juncus subnodulosus*, *Tofieldia calyculata*, *Helleborine palustris*, *Orchis*



Traunsteineri, *O. incarnatus*, *Linum catharticum*, *Parnassia palustris*, *Primula farinosa*, *Potentilla erecta*, *Centaureum erythraea*, *Succisa pratensis*.

Pinguicula alpina, *Drosera anglica*, *Pedicularis palustris*, *Menyanthes trifoliata*, *Rhinanthus rumelicus* **osiliensis*.

A mountainous species of Europe; occurs as a rarity in the western part of Estonia (E moc, Einf) in swamps abounding in springs and in swampy woody meadows, occasionally also in dry meadows, sometimes abundant.

Estonia *maritima occidentalis*, parish of Kihelkonna near the Sutru wood in the Suurissoo swamp, Lümada.

25. VII. 1933.

leg. B. Saarsoo.

ANSÄTZE ZU EINER EXPANSIONISTISCHEN KINEMATIK

VON

J. NUUT

TARTU 1935

In einem vorhergehenden Artikel ¹⁾ habe ich ein mathematisches Modell skizziert, das sowohl Expansion, als auch Gravitation im raumzeitlichen Weltgeschehen einheitlich erfasst. Beschränkt man sich auf einen zweidimensionalen Weltraum, so wird das Modell anschaulich; es besteht dann in folgendem:

In einem dreidimensionalen Lobatschewski'schen Raum L_3 , also einem Raum mit hyperbolischer Metrik, ist ein Bündel paralleler, d. h. sich in einem unendlich fernen (u. f.) Punkt treffender Geraden fixiert. Diese Parallelen markieren die Kraftlinien eines im L_3 auf Massenpunkte wirkenden Schwerefeldes konstanter Intensität; die Kraft ist vom Scheitelpunkt des Bündels weg gerichtet. Das Schwerefeld bewirkt ein „Fallen“ der Massen im L_3 . Die fallenden Massen führen einen der Schwere selbst nicht direkt unterworfenen zweidimensionalen Weltraum E'_2 mit sich, wobei dieser E'_2 der Verschiebung einen Widerstand entgegensetzt, so dass die stationäre Bewegung des E'_2 gleichförmig wird. Der E'_2 bildet im grossen eine Niveaufläche des Parallelenbündels, also eine Lobatschewski'sche Grenzsphäre; die Metrik im E'_2 ist also im grossen euklidisch. Unter dem Druck der Massenpunkte wird aber die elastisch dehnbar gedachte Fläche E'_2 lokal um ein geringes deformiert, nämlich in der nächsten Umgebung der Massen etwas eingebuchtet. Diese Einbuchtungen bewirken Gravitationserscheinungen der sich auf dem E'_2 reibungslos verschiebenden Massen; diese Gravitation trägt jedoch durchaus lokalen Charakter. Im grossen werden dagegen die Massen unter dem Einfluss des divergierenden Parallelenbündels auseinanderstreben, im E'_2 lokalisierte Beobachter werden also das Phänomen der Expansion konstatieren. Die Zeit ist ein der Weglänge in der Fallrichtung im L_3 proportionaler Parameter. Die Nichtumkehrbarkeit der Zeit äussert sich in der Einseitigkeit des Parallelenbündels. Die den L_3 definierende

¹⁾ „Eine nichteuklidische Deutung der relativistischen Welt.“ Acta et Comm. Univ. Tartuensis, A XXIX.₃ (1935).

charakteristische Konstante bestimmt eine für sämtliche Beobachter im E_2 kovariante Geschwindigkeit, die man offenbar als Lichtgeschwindigkeit c zu deuten hat.

Die hier kurz angedeutete Auffassung verknüpft die Weltexpansion auf natürliche Weise mit der Relativitätstheorie zu einem organischen Ganzen, nur dass die Einstein'sche sog. „spezielle“ Theorie einer gewissen Konstante den Wert 0 beimisst, während der tatsächliche Wert dieser Konstante (des Expansionskoeffizienten), wenn auch als sehr klein, so doch als von 0 verschieden anzunehmen ist. Für die dargestellte Auffassung charakteristisch ist, dass die Gravitation bloss ein nebensächliches, die Expansion störendes Phänomen bedeutet. In der vorliegenden Abhandlung sind einige Konsequenzen dieser Ideen analytisch entwickelt, u. zw. für den tatsächlichen, anschaulich nicht erfassbaren Fall eines dreidimensionalen Welt- raumes, jedoch ohne Berücksichtigung der lokalen Raumkrümmungen, d. h. der Gravitation.

Um dem auf die Physik orientierten Leser das Verständnis der zum eigentlichen Thema gehörigen Ausführungen zu erleichtern und das notwendige analytische Werkzeug beisammen zu haben, sind vor allem (§§ 1—4) die in Frage kommenden bekannten Tatsachen und Formeln der hyperbolischen Geometrie für eine beliebige Dimensionszahl n in knapper Form zusammengestellt. In den nachfolgenden Paragraphen (§§ 5—11) handelt es sich dann schon um Probleme in physikalischer Einkleidung. Der Leser kann mit § 5 beginnen und §§ 1—4 als rein-mathematischen Anhang betrachten. Eigentlich den Astrophysiker angehende Fragen sind im § 8 behandelt.

§ 1. Gruppe der hyperbolischen Bewegungen. Im folgenden bedeutet n irgendeine fixierte positive ganze Zahl. Zur Abkürzung der Schreibweise sollen für Indizes folgende Festsetzungen gelten:

Ein mit α , β oder γ bezeichneter Index soll die Werte 1 bis n annehmen; es bedeutet demnach z. B. x_β entweder x_1 , oder x_2, \dots oder x_n . Ein mit λ , μ oder ν bezeichneter Index soll dieselben Werte, jedoch mit Ausnahme einiger gewisser spezieller Werte, durchlaufen. Vom § 3 an ist beständig n der einzige ausgenommene Spezialwert. Ein lateinischer Index

k, l oder m bedeutet stets eine bestimmte Zahl aus der Wertreihe $0, 1, \dots, n$, eventuell unter gewissen, besonders genannten Nebenbedingungen. Tritt in zwei oder mehr nebeneinandergesetzten Termen ein und derselbe griechische Index auf, so soll es sich nicht einfach um das Produkt dieser Terme, sondern um die Summe der Produkte für sämtliche gestatteten Werte dieses gemeinsamen Index handeln. Es bedeutet also z. B. $x_\beta y_\beta$ die Summe $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$, dagegen $x_\nu y_\nu$ vom § 3 an stets die Summe $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}$.

Ein n -dimensionaler hyperbolischer Raum L_n wird nun für unsere Zwecke am passendsten folgendermassen definiert ²⁾:

Ein Punkt (x_0, x_β) oder kurz (x) ist ein geordneter Wertekomplex der $n+1$ für allgemein reell genommenen Variablen x_0, x_β . Zulässig ist jeder Wertekomplex, mit alleiniger Ausnahme desjenigen, wo sämtliche Variablen gleichzeitig 0 sind. Die Punkte (x) und $(\varkappa x)$, d. h. (x_0, x_β) und $(\varkappa x_0, \varkappa x_\beta)$ sind bei jedem von 0 verschiedenen \varkappa als identisch anzusehen. Die x_0, x_β sind die homogenen Koordinaten dieses Punktes. Wählt man $x_0 = 1$, so erhält man die unhomogenen Koordinaten des betreffenden Punktes, wobei dann die Angabe der x_β allein schon den Punkt eindeutig bestimmt.

Wir wählen nun eine positive Konstante c und fixieren die quadratische Form F_{xx} :

$$F_{xx} = c^2 x_0^2 - x_\beta x_\beta. \quad (1)$$

Die Gesamtheit der Punkte, deren Koordinaten der Gleichung

$$F_{xx} = 0 \quad (2)$$

genügen, liefert das absolute Gebilde oder auch das u. f. Gebilde des L_n ; ein jeder Punkt von (2) heisst ein u. f. Punkt.

Wird für einen Punkt

$$F_{xx} > 0, \quad (3)$$

²⁾ Als zusammenhängende Darstellung der Grundzüge der nichteuklidischen Geometrie sei etwa genannt J. L. Coolidge, „The Elements of Non-Euclidean Geometry“ (Oxford 1909). Die Bezeichnung „hyperbolischer Raum“ rührt von F. Klein her [(„Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“; Math. Ann. Bd. 4 (1871) u. Bd. 6 (1873)], desgleichen der ganze Gedankengang von §§ 1 und 2 unseres Textes.

so heisst der Punkt ein eigentlicher. Punkte, für die F_{xx} negativ wird, heissen ideell. Die Gesamtheit der eigentlichen Punkte bildet den eigentlichen Raum \mathbf{L}_n , der uns hier vorzugsweise interessiert. Für einen eigentlichen Punkt kann man stets $x_0 = 1$ wählen, also unhomogene Koordinaten verwenden, was wir von § 4 an durchweg tun wollen.

Unter den linearen homogenen Punkttransformationen

$$x_0 = a_{00} x'_0 + a_{0\beta} x'_\beta, \quad x_\alpha = a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta \quad (4)$$

mit reellen Koeffizienten a_{kl} , positivem a_{00} und positiver Determinante D gibt es solche, für die die Form F_{xx} eine Kovariante ist. Diesen sämtlichen Forderungen genügende Transformationen sollen Bewegungen des \mathbf{L}_n heissen, die den Punkt (x) in den Punkt (x') überführen. Eine proportionale Änderung sämtlicher Koeffizienten ist hierbei ohne Belang; andererseits kann man durch proportionale Änderung der Koeffizienten erreichen, dass $D = 1$ wird. Man erhält dann für jede Bewegung einen eindeutig definierten Repräsentanten (4). Die Gesamtheit dieser Repräsentanten liefert eine Transformationsgruppe. Für einen solchen Repräsentanten ergibt die Kovarianzforderung:

$$\begin{aligned} c^2 (a_{00} x'_0 + a_{0\beta} x'_\beta)^2 - (a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta) (a_{\alpha 0} x'_0 + a_{\alpha\beta} x'_\beta) &\equiv \\ &\equiv c^2 x'^2_0 - x'_\beta x'_\beta, \end{aligned}$$

was durch Koeffizientenvergleichung zum Bedingungssystem

$$\begin{aligned} c^2 a^2_{00} - a_{\alpha 0} a_{\alpha 0} &= c^2 \\ c^2 a^2_{0k} - a_{\alpha k} a_{\alpha k} &= -1, \quad k \neq 0 \\ c^2 a_{0k} a_{0l} - a_{\alpha k} a_{\alpha l} &= 0, \quad k \neq l \end{aligned} \quad (5)$$

führt.

Bedeutet A_{kl} die a_{kl} entsprechende Unterdeterminante von D , so wird infolge $D = 1$ die zu (4) inverse Transformation lauten

$$x'_0 = A_{00} x_0 + A_{\beta 0} x_\beta, \quad x'_\alpha = A_{\alpha 0} x_0 + A_{\beta \alpha} x_\beta.$$

Wegen

$$a_{00} A_{00} + a_{\beta 0} A_{\beta 0} = D, \quad a_{\alpha 0} A_{00} + a_{\beta \alpha} A_{\beta 0} = 0$$

und (5) wird aber

$$A_{00} = a_{00}, \quad A_{\beta 0} = -\frac{a_{\beta 0}}{c^2},$$

und auf ähnliche Weise folgt

$$A_{0\alpha} = -c^2 a_{0\alpha}, \quad A_{\beta\alpha} = a_{\beta\alpha}.$$

Führt man dies ein, so ergibt sich als zu (4) inverse Transformation

$$x'_0 = a_{00} x_0 - \frac{1}{c^2} a_{\beta 0} x_\beta, \quad x'_\alpha = -c^2 a_{0\alpha} x_0 + a_{\beta\alpha} x_\beta. \quad (6)$$

Wendet man hierauf (5) an, so folgt, dass die a_{kl} auch noch den Bedingungen

$$\begin{aligned} a_{00}^2 - c^2 a_{0\alpha} a_{0\alpha} &= 1 \\ a_{k0}^2 - c^2 a_{k\alpha} a_{k\alpha} &= -c^2, \quad k \neq 0 \\ a_{k0} a_{l0} - c^2 a_{k\alpha} a_{l\alpha} &= 0, \quad k \neq l \end{aligned} \quad (7)$$

Folge leisten.

Dass solche Bewegungstransformationen tatsächlich existieren, zeigen folgende Beispiele:

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \\ x_k &= x'_k \cos \varphi + x'_l \sin \varphi \\ x_l &= -x'_k \sin \varphi + x'_l \cos \varphi \\ x_\nu &= x'_\nu, \quad \nu \neq k, \nu \neq l. \end{aligned} \quad (8)$$

Diese durch das Indexpaar k, l und den reellen Parameter φ gekennzeichnete Bewegung heisst eine Drehung.

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \operatorname{ch} \omega - x'_k \frac{1}{c} \operatorname{sh} \omega \\ x_k &= -x'_0 c \operatorname{sh} \omega + x'_k \operatorname{ch} \omega \\ x_\nu &= x'_\nu, \quad k \neq 0, \nu \neq k. \end{aligned} \quad (9)$$

Hier bedeuten $\operatorname{sh} \omega$ und $\operatorname{ch} \omega$ entsprechend den Hyperbelsinus und den Hyperbelcosinus eines reellen Parameters ω . Diese durch ω und den Index k gekennzeichnete Bewegung heisst eine Verschiebung; wir bezeichnen sie weiterhin mit $V_k(\omega)$.

3. Beispiel:

$$\begin{aligned} x_0 &= x'_0 \operatorname{ch} \omega - x_\beta a_\beta \frac{1}{c} \operatorname{sh} \omega \\ x_\gamma &= -x'_0 c a_\gamma \operatorname{sh} \omega + x'_\gamma + x_\beta a_\beta a_\gamma (\operatorname{ch} \omega - 1), \end{aligned} \quad (10)$$

wobei die α_β reelle Parameter bedeuten, die der Bedingung

$$\alpha_\beta \alpha_\beta = 1 \quad (11)$$

genügen. Für $\alpha_k = 1$, $\alpha_\nu = 0$, $\nu \neq k$, geht diese Bewegung in $V_k(\omega)$ über.

Man kann beweisen, dass sämtliche Bewegungen des L_n sich aus Verschiebungen und Drehungen zusammensetzen lassen, doch brauchen wir darauf nicht näher einzugehen.

Aus der Kovarianz von F_{xx} folgt, dass die Kategorie, der ein Punkt angehört, sich bei den Transformationen der Gruppe der hyperbolischen Bewegungen nicht ändert. Es ist also speziell unmöglich durch Bewegungen aus dem eigentlichen Gebiet des L_n hinauszugelangen.

§ 2. Distanz, Bogenelement, Winkelgrösse, Orthogonalität.

Sind (x) und (y) zwei verschiedene Punkte, so heisst die Gesamtheit der Punkte $(ux + vy)$, also der Punkte mit den Koordinaten $ux_0 + vy_0$, $ux_\beta + vy_\beta$ bei variablen u, v , die Gerade $ux + vy$.

Den durch $x_\beta = 0$ definierten Punkt nennen wir den Ursprung. Die durch den Ursprung und den Punkt

$$x_k = c x_0, \quad x_\nu = 0, \quad \nu \neq k$$

bestimmte Gerade soll die k -Achse heissen.

Bei einer Bewegung (4) geht die Gerade $ux + vy$ in die Gerade $ux' + vy'$ über. Bewegungen sind demnach nicht bloss Punkt-, sondern auch Geradentransformationen (Kollineationen).

Es gilt wie für jede quadratische Form die Identität

$$F_{ux+vy, ux+vy} = u^2 F_{xx} + 2uv F_{xy} + v^2 F_{yy}, \quad (12)$$

wo

$$F_{xy} = F_{yx} = c^2 x_0 y_0 - x_\beta y_\beta. \quad (13)$$

Wendet man auf beide Seiten von (12) eine Bewegungstransformation an, so zeigt sich, dass die bilineare Polarform F_{xy} gleichfalls eine Kovariante der Bewegungsgruppe ist.

Der Quotient $\frac{u_1}{v_1} : \frac{u_2}{v_2}$ heisst das Doppelverhältnis der zwei Punktepaare $(x), (y)$ und $(u_1 x + v_1 y), (u_2 x + v_2 y)$ einer Geraden. Dieses Doppelverhältnis ist beliebigen linearen homogenen Transformationen gegenüber invariant.

Unter der Distanz oder Entfernung q_{xy} zweier Punkte wird der mit $\frac{c}{2}$ multiplizierte Wert des natürlichen Logarithmus von demjenigen Doppelverhältnis verstanden, den die beiden Punkte (x) , (y) einerseits und die Schnittpunkte der Geraden $ux + vy$ mit dem absoluten Gebilde andererseits ergeben. Dieses Doppelverhältnis bestimmt sich aus der in Bezug auf $\frac{u}{v}$ quadratischen Gleichung, die erhalten wird durch Nullsetzung der rechten Seite von (12). Statt der zitierten expliziten Definition von q_{xy} ist es analytisch bequemer mit Hyperbelfunktionen von $\frac{q_{xy}}{c}$ zu operieren. Ausgehend von der expliziten Definition findet man durch einige Umformungen:

$$\operatorname{ch} \frac{q_{xy}}{c} = \frac{F_{xy}}{\sqrt{F_{xx} F_{yy}}}, \quad \operatorname{th} \frac{q_{xy}}{c} = \frac{\sqrt{F_{xy}^2 - F_{xx} F_{yy}}}{F_{xy}}. \quad (14)$$

Sind beide Punkte (x) und (y) eigentlich, so ist durch jede der Formeln (14) q_{xy} reell und dem Absolutwert nach eindeutig bestimmt.

Schreibt man $(x + dx)$ statt (y) , wobei im eigentlichen Gebiet stets $dx_0 = 0$ gesetzt werden darf, so ergibt jede der Formeln (14) für die dann zur symbolischen Andeutung des Grenzprozesses mittels dq zu bezeichnende Distanz:

$$dq^2 = c^2 \frac{F_{xx}^2 dx, dx - F_{xx} F_{dx, dx}}{F_{xx}^2}. \quad (15)$$

Dies ist der Ausdruck für das Quadrat eines Bogenelements dq in dieser hyperbolischen Metrik.

Aus (14) ersieht man, dass q_{xy} unendlich gross wird, wenn (y) ein u. f. Punkt, (x) dagegen ein beliebiger eigentlicher oder ideeller Punkt ist. Damit ist die Bezeichnung u. f. Punkt gerechtfertigt.

Analog der Distanz wird die Winkelgrösse definiert. Sind (x) , (η) , (ζ) drei verschiedene, nicht einer Geraden angehörige Punkte, so bildet die Gesamtheit der Punkte $(ux + v\eta + w\zeta)$ eine (zweidimensionale) Ebene. Jede Gerade durch (x) in dieser Ebene $ux + v\eta + w\zeta$ trifft die Gerade $v\eta + w\zeta$ in einem bestimmten Punkte, vier solcher Geraden also in vier Punkten;

diese vier Punkte bestimmen das Doppelverhältnis der betreffenden vier Geraden. Bedeutet i die imaginäre Einheit, so versteht man unter der Grösse des Winkels zwischen den Geraden $ux + v\eta$, $ux + w\zeta$ den mit $\frac{i}{2}$ multiplizierten Wert des natürlichen Logarithmus von dem Doppelverhältnis, das beide genannten Geraden und das durch (x) gehende und in derselben Ebene liegende Tangentenpaar an das absolute Gebilde ergeben. Hier benutzt man statt der expliziten Definition dieses Winkels $\varphi_{\eta\zeta}$ besser die trigonometrischen Funktionen von $\varphi_{\eta\zeta}$. Eine Berechnung auf Grund der zitierten Definition ergibt:

$$\cos \varphi_{\eta\zeta} = \frac{F_{xx} F_{\eta\zeta} - F_{x\eta} F_{x\zeta}}{\sqrt{(F_{x\eta}^2 - F_{xx} F_{\eta\eta})(F_{x\zeta}^2 - F_{xx} F_{\zeta\zeta})}}. \quad (16)$$

Ist der Scheitelpunkt (x) eigentlich, so ist $\varphi_{\eta\zeta}$ durch (16) reell u. zw. unendlich vieldeutig bestimmt. Eine Verschiebung von (η) resp. (ζ) längs $ux + v\eta$ resp. $ux + w\zeta$ lässt $\varphi_{\eta\zeta}$ ungeändert. Bewegungen gegenüber erweisen sich Distanz und Winkel als invariant, wie aus den Darstellungen (14) und (16) abzulesen ist.

Es wird $\varphi_{\eta\zeta} = \frac{\pi}{2}$, d. h. die Geraden werden wechselseitig orthogonal, sobald

$$F_{xx} F_{\eta\zeta} - F_{x\eta} F_{x\zeta} = 0. \quad (17)$$

Man verifiziert hiernach leicht, dass je zwei Achsen zueinander senkrecht stehen.

Ist (x) der Ursprung, (ζ) beliebig, so bildet die Gerade $ux + w\zeta$ mit der β -Achse einen Winkel φ_β , der sich aus

$$\cos \varphi_\beta = \frac{\xi_\beta}{\sqrt{\xi_\beta \xi_\beta}} \quad (18)$$

bestimmt, wie aus (16) zu ersehen ist. Gibt man der Quadratwurzel in (18) ein festes Vorzeichen, so heissen die n Grössen $\cos \varphi_\beta$ die Richtungskosinus der Geraden $ux + w\zeta$. Sind α_γ und β_γ entsprechend die Richtungskosinus zweier durch den Ursprung gehender Geraden, so findet man wiederum nach (16) für den Winkel φ zwischen diesen beiden Geraden

$$\cos \varphi = \alpha_\gamma \beta_\gamma. \quad (19)$$

Fallen beide Geraden zusammen, so wird $\varphi = 0$ und (19) ergibt

$$\alpha_\gamma \alpha_\gamma = 1. \quad (20)$$

Die Formeln (19) und (20) stimmen mit denjenigen der euklidischen Geometrie überein.

Analysiert man die in § 1 Beispiel 3 behandelte Bewegung (10), so findet man jetzt, dass die dort auftretenden Grössen α_β die Richtungskosinus derjenigen Geraden sind, welche durch den Ursprung und durch denjenigen Punkt geht, in welchen der Ursprung durch diese Bewegung übergeführt wird. Diese Gerade schneidet das absolute Gebilde in einem Punkt (η), wobei $\eta_\beta = c \eta_0 \alpha_\beta$, und dieser Punkt erweist sich als ein Fixpunkt der Bewegung. Die Gerade mit den Richtungskosinus α_β wird daher durch die genannte Bewegung in sich selbst transformiert, sie ist die Verschiebungsachse. Man verifiziert ferner leicht, etwa durch Determinantenbildung, dass ein beliebiger Punkt des L_n sich nach Ausführung der Bewegung (10) in derselben durch die Verschiebungsachse gehenden Ebene befindet, in der er sich zuvor befand. Die Bewegung (10) ist daher eine Verschiebung ohne Drehung. Jeder eigentliche Punkt der Verschiebungsachse wird um die Strecke $q = c\omega$ verschoben. Für Punkte, die nicht auf der Verschiebungsachse liegen, ist der Betrag der Verschiebung grösser, u. zw. um so mehr, je weiter sie von dieser Achse abstehen. Hierin besteht ein charakteristischer Unterschied zwischen hyperbolischen und euklidischen Verschiebungen.

Es sei noch auf folgende, auf Grund von (14) und (16) verifizierbare Tatsachen hingewiesen:

Ist q_β die auf geläufige Weise mit einem Vorzeichen versehene Distanz der Orthogonalprojektion eines beliebigen Punktes (ξ) auf die β -Achse, so hat die unhomogene Koordinate ξ dieses Punktes die Bedeutung:

$$\xi_\beta = c \operatorname{th} \frac{q_\beta}{c}. \quad (21)$$

Für ein unendlich grosses c gelangt man so zu cartesischen Koordinaten.

Die Gesamtheit derjenigen Punkte, wo $x_n = 0$ wird, bildet einen L_{n-1} mit derselben charakteristischen Konstanten c . Ist nun (η) irgendein Punkt des L_n , ferner ($\tilde{\eta}$) derjenige Punkt des L_{n-1} , für welchen

$$\tilde{\eta}_0 = \eta_0, \quad \tilde{\eta}_\nu = \eta_\nu, \quad \tilde{\eta}_n = 0 \quad (\nu \neq n),$$

so erweist sich $(\tilde{\eta})$ als Orthogonalprojektion des Punktes (η) auf den \mathbf{L}_{n-1} . Dies will besagen, dass die Gerade $u\eta + v\tilde{\eta}$ orthogonal ist zu jeder durch $(\tilde{\eta})$ gehenden, im \mathbf{L}_{n-1} gelegenen Geraden. Nimmt man speziell (η) auf der n -Achse, so ist $(\tilde{\eta})$ der Ursprung, und es erweist sich die n -Achse als orthogonal zu jeder durch den Ursprung im \mathbf{L}_{n-1} verlaufenden Geraden. Die durch (η) und die n -Achse gehende Ebene enthält stets auch den Punkt $(\tilde{\eta})$; beschreibt hierbei (η) eine Gerade in dieser Ebene, so ist die Schnittgerade dieser Ebene mit dem \mathbf{L}_{n-1} die Orthogonalprojektion der erstgenannten Geraden auf den \mathbf{L}_{n-1} .

Für die Distanz q eines beliebigen Punktes (η) vom Ursprung findet man nach (14) in unhomogenen Koordinaten η_β :

$$c \operatorname{th} \frac{q}{c} = \sqrt{\eta_\beta \eta_\beta}. \quad (22)$$

Die Projektion \bar{q} dieser Distanz auf den \mathbf{L}_{n-1} führt vom Ursprung zu $(\tilde{\eta})$. Bedeutet φ den Winkel zwischen q und \bar{q} , so berechnet sich aus (18), (19) und (22)

$$\operatorname{th} \frac{\bar{q}}{c} = \operatorname{th} \frac{q}{c} \cdot \cos \varphi, \quad (23)$$

und diese Formel gilt dann notwendigerweise für jede Strecke q und ihre in einen Endpunkt von q mündende Projektion \bar{q} , unabhängig davon, ob \bar{q} im \mathbf{L}_{n-1} liegt oder nicht. Im rechtwinkligen geradlinigen Dreieck, wo q die Hypotenuse und \bar{q} die anliegende Kathete bedeutet, wird also der spitze Winkel φ durch (23) bestimmt.

Liegen zwei Punkte A, B entsprechend auf zwei verschiedenen Achsen in den Entfernungen q_1 und q_2 vom Ursprung, so findet man für die Distanz q von A bis B aus (14):

$$\operatorname{ch} \frac{q}{c} = \operatorname{ch} \frac{q_1}{c} \cdot \operatorname{ch} \frac{q_2}{c}, \quad (24)$$

und diese Formel gilt offenbar wieder für jedes rechtwinklige Dreieck, unabhängig von der speziellen Lage der Katheten. Durch (23) und (24) ist die Trigonometrie des rechtwinkligen, mithin auch eines beliebigen schiefwinkligen Dreiecks vollkommen bestimmt. Da (23) und (24) sich aus bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, wenn man den Radius der betreffenden Sphäre rein imaginär u. zw. gleich ci nimmt, so folgt, dass die ebene Trigonometrie des \mathbf{L}_n formal identisch ist mit

der Trigonometrie auf einer euklidischen Sphäre mit imaginärem Radius *ci*.

Beiläufig sei erwähnt, dass infolge (16) und (14) die Trigonometrie sphärischer Dreiecke im L_n identisch wird mit der euklidischen sphärischen Trigonometrie, soweit nicht Berechnungen in Längeneinheiten in Betracht kommen.

§ 3. **Isogonalräume von Parallelenbündeln (uneigentliche Sphären)**³⁾. In unserer weiteren Darstellung werden Gebilde auftreten, deren Gleichung lautet:

$$F_{xx} - (cx_0 - x_n + k_\nu x_\nu \cot \psi)^2 = 0. \quad (25)$$

Hierin ist ψ eine Konstante, während die Grössen k_ν Richtungskosinus einer durch den Ursprung gehenden und im L_{n-1} verlaufenden Geraden sind; es ist also

$$k_\nu k_\nu = 1, \quad (26)$$

wobei der Index ν , wie weiterhin überall, von 1 bis $n-1$ läuft. Mit den geometrischen Eigenschaften dieser $(n-1)$ -dimensionalen Gebilde (25) müssen wir uns näher vertraut machen.

Sieht man von imaginären Punkten ab, so besitzt (25) offenbar nur eigentliche und unendlich ferne Punkte. Seine eigentlichen Punkte verteilen sich auf zwei Gebiete, die durch unendlich ferne Punkte getrennt werden. Die u. f. Punkte des Gebildes ergeben sich als Schnitt von

$$cx_0 - x_n + k_\nu x_\nu \cot \psi = 0 \quad (27)$$

mit $F_{xx} = 0$. Zur Abkürzung soll in diesem Paragraphen die Gesamtheit der u. f. Punkte von (25) das Gebiet U heissen.

Die n -Achse trifft (25) im Ursprung und im Punkt $\xi_\nu = 0$, $\xi_n = c \xi_0$; dieser Punkt (ξ) gehört U an. Wir wollen zunächst feststellen, wie sich die Gleichung (25) transformiert, wenn man eine Bewegung ausführt, die den Ursprung ungeändert lässt, dabei aber die n -Achse durch einen anderen Punkt von U hindurchführt. Die Koeffizienten einer solchen Bewegungstransformation (4) müssen offenbar ausser (5) und (7) noch gewissen anderen einschränkenden Bedingungen unterliegen. Der Um-

³⁾ Über Eigenschaften und Definitionsmöglichkeiten von Sphären in der nichteuklidischen Geometrie vgl. z. B. J. L. Coolidge, l. c., XI, oder auch F. Klein „Vorles. ü. Nicht-Euklidische Geometrie“ (Neubearbeitung von W. Rosemann, Berlin 1928), Kap. VIII § 7.

stand, dass der Ursprung ein Fixpunkt sein soll, ergibt nach (4), (6) und (7)

$$a_{\beta 0} = 0, \quad a_{0\beta} = 0, \quad a_{00} = 1. \quad (28)$$

Die zweite Forderung lässt sich so auffassen, dass ein Punkt von (27) in (5) übergehen soll; dies führt über (4), (28) und (27) zur Relation

$$1 - a_{nn} + k_\nu a_{\nu n} \cot \psi = 0. \quad (29)$$

(28) und (29) sind die gesuchten einschränkenden Bedingungen. Man findet mit ihrer Hilfe

$$cx_0 - x_n + k_\nu x_\nu \cot \psi = cx'_0 - x'_n + (k_\nu a_{\nu\mu} - a_{n\mu} \tan \psi) x'_\mu \cot \psi.$$

Nun zeigt es sich aber, dass man die Grössen

$$k_\nu a_{\nu\mu} - a_{n\mu} \tan \psi = k'_\mu$$

wieder als Richtungskosinus einer gewissen im L_{n-1} liegenden, durch den Ursprung gehenden Geraden auffassen kann. Man findet nämlich unter Bezugnahme auf (5), (7), (28), (29), (26):

$$\begin{aligned} k'_\mu k'_\mu &= k_\lambda k_\nu a_{\lambda\mu} a_{\nu\mu} - 2 k_\nu a_{\nu\mu} a_{n\mu} \tan \psi + a_{n\mu} a_{n\mu} \tan^2 \psi \\ &= k_\lambda k_\nu a_{\lambda\mu} a_{\nu\mu} + 2 k_\nu a_{\nu n} a_{n\mu} \tan \psi + (1 - a_{nn}^2) \tan^2 \psi \\ &= k_\lambda k_\nu a_{\lambda\mu} a_{\nu\mu} + k_\lambda k_\nu a_{\lambda n} a_{\nu n} \\ &= k_\nu k_\nu \\ &= 1. \end{aligned}$$

Da F_{xx} Bewegungen gegenüber kovariant ist, so nimmt also die transformierte Gleichung (25) die Gestalt an

$$F_{x'x'} - (cx'_0 - x'_n + k'_\nu x'_\nu \cot \psi)^2 = 0.$$

Hier hat ψ denselben Wert beibehalten und nur die Gerade k_ν ist in eine andere Gerade k'_ν übergegangen, die nach Ausführung der Bewegung in den L_{n-1} zu liegen kommt.

Nun soll noch der Einfluss einer anderen Bewegung untersucht werden, nämlich einer solchen, wo (5) ein Fixpunkt bleibt, dagegen irgendein anderer eigentlicher Punkt von (25) in den Ursprung fällt. Der analytische Ausdruck der ersten Forderung wird hier

$$ca_{0\nu} - a_{n\nu} = 0, \quad a_{\nu 0} + a_{\nu n} c = 0, \quad ca_{00} - a_{n0} = -c^2 a_{0n} + a_{nn} c. \quad (30)$$

Hiernach findet man:

$$\begin{aligned} cx_0 - x_n + k_\nu x_\nu \cot \psi &= (a_{nn} - ca_{0n} - k_\nu a_{\nu n} \cot \psi) (cx'_0 - x'_n) + \\ &\quad + k_\nu a_{\nu\mu} x'_\mu \cot \psi. \end{aligned}$$

Ferner ergibt die zweite Forderung

$$(c^2 a_{00}^2 - a_{n0}^2 - a_{v0} a_{v0}) - (ca_{00} - a_{n0} + k_v a_{v0} \cot \psi)^2 = 0,$$

was unter Bezugnahme auf (5) und (30) zu

$$a_{nn} - ca_{0n} - k_v a_{vn} \cot \psi = \pm 1$$

führt. Die Grössen

$$\pm k_v a_{v\mu} = k'_\mu$$

erweisen sich wiederum als Richtungskosinus einer Geraden im L_{n-1} , denn es wird

$$\begin{aligned} k'_\mu k'_\mu &= k_v a_{v\mu} k_\lambda a_{\lambda\mu} \\ &= k_v k_\lambda a_{v\mu} a_{\lambda\mu} \\ &= k_v k_v \\ &= 1. \end{aligned}$$

Fasst man alles dies zusammen, so gelangt man wieder zu der schon früher erhaltenen Gestalt der transformierten Gleichung (25).

Durch Verknüpfung beider Bewegungsarten folgt somit der Satz:

Eine beliebige Bewegung, die nur den Schnittpunkt der n -Achse im Unendlichen in einen anderen Punkt von U verlegt und den Ursprung in irgendeinen anderen eigentlichen Punkt von (25) überführt, ändert weder die Gestalt der Gleichung (25), noch den Parameter ψ , sondern ersetzt bloss die Richtungskosinus k_v durch andere.

Bedeutet (x) einen Punkt von (25), (η) einen variablen Punkt im L_n , und setzt man die für (η) gebildete Polarform der linken Seite von (25) gleich Null, so folgt

$$F_{x\eta} - (cx_0 - x_n + k_v x_v \cot \psi) (c\eta_0 - \eta_n + k_v \eta_v \cot \psi) = 0. \quad (31)$$

Es ist dies die Gleichung des $(n-1)$ -dimensionalen ebenen Berührungsraumes des Gebildes (25), wenn (x) den Berührungspunkt und (η) einen beliebigen Punkt dieses Berührungsraumes darstellt. Jede Gerade $ux + v\eta$, wo (x) der Gleichung (25) und (η) der Gleichung (31) Folge leistet, ist eine Tangente an (25). Fällt (x) in den Ursprung, so ergibt (31):

$$k_v \eta_v \cot \psi - \eta_n = 0. \quad (32)$$

Für den Winkel φ , den eine durch den Ursprung als Berührungspunkt an (25) gelegte Tangente mit der n -Achse bildet, findet man aus (16) und (32)

$$\cot \varphi = \frac{k_v \eta_v}{\sqrt{\eta_v \eta_v}} \cot \psi.$$

Nun besitzt aber die Projektion dieser Tangente auf den \mathbf{L}_{n-1} folgende Richtungskosinus a_μ in diesem \mathbf{L}_{n-1} :

$$a_\mu = \frac{\eta_\mu}{\sqrt{\eta_v \eta_v}}.$$

Es wird daher

$$\cot \varphi = k_v a_v \cot \psi = \cos \delta \cdot \cot \psi, \quad (33)$$

wenn δ den Winkel zwischen der Projektion der Tangente und der durch die k_v bestimmten Geraden bedeutet. Der Winkel φ schwankt also, je nach der Lage der Tangente, zwischen den Extremalwerten ψ und $\pi - \psi$, m. a. W., ψ ist der Neigungswinkel der n -Achse gegen den Berührungsraum (32). Aus dem oben bewiesenen Satz folgt aber dann:

Jede durch U gehende Gerade, welche das Gebilde (25) in einem eigentlichen Punkt trifft, ist gegen den Berührungsraum in diesem Treffpunkt um den Winkel ψ geneigt.

Nennt man die Gesamtheit der Geraden mit einem gemeinsamen u. f. Punkt ein Parallelenbündel im \mathbf{L}_n , so hat man demnach in (25) ein Gebilde, das sämtliche Geraden eines Parallelenbündels, die es in eigentlichen Punkten trifft, isogonal, und zwar stets unter demselben Winkel ψ schneidet, sobald nur der Scheitel des Bündels auf U liegt. Infolge dieser Eigenschaft nennen wir das Gebilde (25) einen Isogonalraum.

Denjenigen u. f. Punkt, wo die n -Achse das Gebilde (25) trifft, d. h. den Punkt, dessen Koordinaten

$$x_v = 0, \quad x_n = cx_0$$

sind, wollen wir von nun an überall stets mit M bezeichnen.

Eine Ebene durch M wird den Isogonalraum in einer ebenen Kurve schneiden. Lässt man diese Ebene in die n & 1-Ebene (also die Ebene, welche die n -Achse und die 1-Achse enthält) fallen, was stets durch eine Bewegungstransformation, die M

ungeändert lässt, erreicht werden kann, so wird die Gleichung dieser Kurve:

$$F_{xx} - (cx_0 - x_n + x_1 \cot \psi_1)^2 = 0, \quad (34)$$

$$x_2 = x_3 = \dots = x_{n-1} = 0,$$

wobei

$$\cot \psi_1 = k_1 \cot \psi$$

gesetzt ist. Es ist dies nichts anderes, als ein Spezialfall von (25) für die Dimensionszahl $n = 2$; der einzige Richtungskosinus k_1 wird dann notwendigerweise gleich 1, wenn man ihn positiv wählt. Für die Kurve (34) gilt also ebenfalls die Isogonaleigenschaft, u. zw. mit $\cos \delta = 1$, weil die Projektion der Tangente notwendig in die einzige Gerade des L_{n-1} , nämlich die 1-Achse fällt, und diese einzige Gerade ebenso notwendig die k_v -Gerade sein muss. Es wird also für die Kurve (34) $\varphi = \psi_1$ oder $\varphi = \pi - \psi_1$, bei passender Richtungswahl wird also der Neigungswinkel gleich ψ_1 . Einen durch M gehenden ebenen Schnitt von (25) nennen wir kurz eine Isogone. Eine solche Isogone schneidet die sie in eigentlichen Punkten treffenden Geraden des durch M definierten Parallelenbündels unter einem konstanten Winkel ψ_1 ; die Grösse ψ_1 hängt von der speziellen Lage der Schnittebene ab, jedoch ist beständig ψ_1 in den Schranken ψ und $\pi - \psi$ eingeschlossen. Im Extremalfall $\psi_1 = \psi$ oder $\psi_1 = \pi - \psi$ sprechen wir von einer Hauptisogone.

Der Pol (p) von (27) in bezug auf das absolute Gebilde hat die Koordinaten

$$p_v = -c k_v p_0 \cot \psi, \quad p_n = c p_0. \quad (35)$$

Sucht man den Schnitt der durch die n -Achse und durch (p) gehenden Ebene mit dem L_{n-1} , so ergibt sich für die Koordinaten x_v eines beliebigen Punktes der Schnittgeraden:

$$x_v = a k_v,$$

wo a bei gewähltem Punkt eine Konstante ist. Hieraus folgt, dass die k_v die Richtungskosinus dieser Schnittgeraden sind. Die Projektion der Tangente des Isogonalraumes fällt also bei dieser Schnittebene mit der Geraden k_v zusammen, d. h. δ in (33) wird 0 und die Schnittkurve mit (25) wird eine Hauptisogone. Es gilt also der Satz:

Man erhält als Schnittkurven dann und nur dann Hauptisogonen, wenn die Schnittebenen durch den Pol (35) gehen.

Es ist leicht zu verifizieren, dass jede den Isogonalraum in einem eigentlichen Punkt treffende Gerade durch den Pol (35) eine Normale von (25) darstellt. Sämtliche solche Normalen gehören also zu einem ideellen Bündel, mit dem im ideellen Gebiet gelegenen Scheitel (p) . Von diesem Standpunkte aus gesehen ist der Isogonalraum (25) ein der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre verwandtes Gebilde; (p) ist der ins ideelle Gebiet verrückte Mittelpunkt dieser Sphäre; der komplexe Radius q bestimmt sich nach (14) aus

$$\operatorname{ch}^2 \frac{q}{c} = -\tan^2 \psi.$$

Es ist demnach konsequent, (p) als den Mittelpunkt von (25) zu bezeichnen.

Führt man im L_n eine Verschiebung $V_n(\lambda)$ aus (§ 1, Beispiel 2), so transformiert sich (25) in die allgemeinere Gestalt:

$$F_{xx} - [e^\lambda (c x_0 - x_n) + k_\nu x_\nu \cot \psi]^2 = 0. \quad (36)$$

Da $V_n(\lambda)$ den Punkt M ungeändert lässt, das Parallelenbündel M also in sich selbst transformiert, so stellt (36) einen Isogonalraum desselben Parallelenbündels für denselben Neigungswinkel ψ dar, denn die Winkel an den Schnittstellen des Gebildes mit dem Bündel bleiben bei Bewegungen invariant. (36) geht notwendigerweise durch M , trifft aber ausserdem die in die n -Achse fallende Parallele des Bündels nicht mehr im Ursprung, sondern im Punkt, dessen unhomogene Koordinate x_n gleich $c \operatorname{th} \lambda$ ist, also, wie aus (21) folgt, in der Entfernung $q = c \lambda$ vom Ursprung. Für $\lambda = 0$ gelangt man zu (25) zurück.

Die Gleichung

$$F_{xx} - e^{2\lambda} [(c x_0 - x_n) + k_\nu x_\nu \cot \psi]^2 = 0 \quad (37)$$

unterscheidet sich von (36), wie leicht zu ersehen, nur dadurch, dass $e^\lambda \cot \psi$ an die Stelle von $\cot \psi$ tritt. Es handelt sich bei (37) also wieder um einen Isogonalraum des Bündels M , jedoch mit einem geänderten Neigungswinkel, der eine Funktion von λ bildet. Bei $\lambda = 0$ geht auch (37) in (25) über. Nun hat aber (37) bei veränderlichem λ beständig ein und denselben Mittelpunkt (p) , wie man erkennt, wenn man auf die Definition von (p) als Pol zurückgeht. Sämtliche Isogonalräume (37) bei variablem λ und konstantem ψ sind also konzentrisch (die Isogonal-

räume (36) dagegen nicht!). Solche konzentrische Isogonalräume erweisen sich als paarweise äquidistant, wie gewöhnliche konzentrische Sphären; die Differenz der komplexen Radien q wird eine reelle konstante Zahl.

§ 4. **Die Lobatschewski'schen Grenzsphären.** Im Spezialfall $\psi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sowohl (36) als (37):

$$F_{xx} - e^{2\lambda} (c x_0 - x_n)^2 = 0. \quad (38)$$

Dieses Gebilde heisst nach Lobatschewski eine Grenzsphäre (von $(n-1)$ Dimensionen). Eine eindimensionale Grenzsphäre heisst ein Grenzkreis. Wir bezeichnen die Grenzsphäre mit E_{n-1} .

M ist der einzige u. f. Punkt von E_{n-1} , die Grenzsphäre zerfällt also nicht mehr in zwei Gebiete, sondern liefert ein einziges zusammenhängendes eigentliches Gebiet. Der Pol (35), also der Mittelpunkt der Grenzsphäre, fällt mit M zusammen. Solange von Grenzsphären die Rede ist, sprechen wir demnach vom Mittelpunkt M . Die Grenzsphäre ist eine uneigentliche $(n-1)$ -dimensionale Sphäre mit u. f. Mittelpunkt. Es existiert nur ein einziges Parallelenbündel, nämlich das Bündel M , für welches die Grenzsphäre die Isogonaleigenschaft zeigt, und zwar schneidet die Grenzsphäre dieses Parallelenbündel orthogonal. Bei variablem λ bestimmt (38) eine Schar konzentrischer Grenzsphären. (38) trifft die n -Achse in der Entfernung $q = c\lambda$ vom Ursprung. Für $\lambda = 0$ erhält man die Grenzsphäre in spezieller Lage:

$$F_{xx} - (c x_0 - x_n)^2 = 0. \quad (39)$$

Das Gebilde (39) geht durch den Ursprung.

Da ein Paar eigentlicher Sphären und ebenso auch ein Paar uneigentlicher Sphären mit ideellem Mittelpunkt die Eigenschaft der Äquidistanz zeigt, sobald der Mittelpunkt im Paar gemeinsam ist, so kann man durch eine Stetigkeitsbetrachtung folgern, dass für ein Paar uneigentlicher Sphären mit gemeinsamem unendlich fernem Mittelpunkt gleichfalls diese Eigenschaft bestehen muss. D. h. also:

Zwei konzentrische Grenzsphären sind stets äquidistant.

Es macht keine Schwierigkeiten, dies auf Grund von (14) auch direkt zu verifizieren; wir wollen uns dabei nicht aufhalten.

Im weiteren wird häufig eine Parameterdarstellung von (38) Verwendung finden, die folgendermassen erhalten werden kann:

Es sollen von nun an durchweg unhomogene Koordinaten benutzt, also die Null-Koordinate gleich 1 gesetzt werden. Es sei (s) mit den Koordinaten s_ν ein variabler Punkt im L_{n-1} , wo $x_n = 0$; (ξ) bedeute den Mittelpunkt M . Wir suchen die Koordinaten desjenigen von M verschiedenen Punktes (x) , wo die Gerade $us + w\xi$ das Gebilde (38) trifft. Infolge der Unhomogenität ist beständig $u + w = 1$. Die Schnittbedingung fordert, da $s_n = 0$:

$$F_{us + w\xi, us + w\xi} - u^2 c^2 e^{2\lambda} = 0,$$

woraus, wenn man s^2 für $s_\nu s_\nu$ schreibt, folgt:

$$u = \frac{2c^2}{c^2(1 + e^{2\lambda}) + s^2}.$$

Nun ist aber $x_\nu = us_\nu$, $x_n = cw = c - cu$, also $c - x_n = cu$. Führt man den Wert von u ein, so ergibt sich die gesuchte Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x_\nu &= \frac{2c^2 s_\nu}{c^2(1 + e^{2\lambda}) + s^2}, \\ c - x_n &= \frac{2c^3}{c^2(1 + e^{2\lambda}) + s^2}. \end{aligned} \quad (40)$$

Sämtliche durch den Mittelpunkt gehenden ebenen Schnitte von (38) sind Isogonen vom Neigungswinkel $\frac{\pi}{2}$, also Grenzkreise.

Die Länge eines Grenzkreisbogens berechnet man am einfachsten, wenn man seine Ebene in die n & 1-Ebene und den einen Endpunkt in den Ursprung legt. Wendet man noch die Parameterdarstellung (40) an, wobei offenbar $s_2 = s_3 = \dots = s_{n-1} = 0$, $s_1 = s$ zu nehmen ist, so folgt aus (15) nach einiger Rechnung für das Bogenelement dq :

$$dq^2 = ds^2.$$

Da bei $s = 0$ die Bogenlänge q auch 0 ist, so hat man bei geeigneter Wahl des Vorzeichens demnach:

$$q = s.$$

Nun ist aber die 1-Achse in dieser speziellen Lage die Tangente an den Grenzkreis im Ursprung als Berührungspunkt, und nach (21) wird

$$s = c \operatorname{th} \frac{l}{c},$$

wenn l die mit passendem Vorzeichen versehene Länge des Tangentenabschnittes vom Berührungspunkt bis zum Schnitt (s) mit der durch den zweiten Endpunkt des Grenzkreisbogens geführten, zum Bündel M gehörigen Parallelen bedeutet. Fasst man alles das zusammen, und beachtet, dass die spezielle Lage des Bogenstückes für die Resultate der Längenmessung unwesentlich ist, so folgt:

Die Länge eines Grenzkreisbogens ist gleich $c \operatorname{th} \frac{l}{c}$, wobei l die Länge der in einem Endpunkt an diesen Bogen gelegten Tangente ist, gemessen vom Berührungspunkt bis zum Schnitt mit der durch den anderen Endpunkt des Bogens gehenden Normalen.

Der Schnitt der Tangente mit der erwähnten Normalen braucht hierbei nicht notwendig im eigentlichen Gebiet zu liegen.

Wir betrachten nun ein aus Grenzkreisen gebildetes rechtwinkliges Dreieck im E_{n-1} . Man kann den Scheitel des rechten Winkels in den Ursprung und die Katheten, deren Längen s_1 und s_2 sein mögen, entsprechend in die n & 1-Ebene und in die n & 2-Ebene gelegt denken; die Endpunkte der Katheten seien dann (x) und (y). Gesucht sei die Länge s der Hypotenuse, d. h. des (x) mit (y) verbindenden Grenzkreises. Nach dem soeben bewiesenen Satz findet man s , indem man in (x) eine Tangente an die Hypotenuse legt und die Länge l dieser Tangente von (x) bis zum Schnitt (η) mit der n & 2-Ebene bestimmt; es wird dann

$$s = c \operatorname{th} \frac{l}{c}.$$

Eine Berechnung auf Grund von (31) und (40) ergibt:

$$\eta_2 = -\frac{2c^2 s_2}{s_1^2 - 2c^2}, \quad \eta_n = \frac{cs_1^2}{s_1^2 - 2c^2}.$$

Mit Hilfe von (40) findet man hierauf:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{4c^6}{(2c^2 + s_1^2)^2}, \\ F_{x\eta} &= \frac{4c^6}{(2c^2 + s_1^2)(2c^2 - s_1^2)}, \\ F_{\eta\eta} &= \frac{4c^4(c^2 - s_1^2 - s_2^2)}{(2c^2 - s_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Auf Grund von (14) folgt hieraus durch einfache Rechnung:

$$s^2 = c^2 \operatorname{th}^2 \frac{l}{c} = s_1^2 + s_2^2,$$

m. a. W., im rechtwinkligen Grenzkreisdreieck gilt der Satz des Pythagoras.

Es soll nun noch der Winkel in demselben rechtwinkligen Dreieck an der Ecke (x) , also der Winkel φ zwischen den s und s_1 in (x) berührenden Tangenten, bestimmt werden. Die Tangente an s_1 trifft die n -Achse in einem solchen Punkt (ζ) , wo $\xi_n = \eta_n$ wird, wie man leicht verifiziert. Man hat daher:

$$\begin{aligned} F_{x\zeta} &= F_{x\eta}, \quad F_{\eta\zeta} = F_{\xi\xi} = c^2 - \eta_n^2 \\ &= \frac{4c^4(c^2 - s_1^2)}{(2c^2 - s_1^2)^2}. \end{aligned}$$

Aus der Formel (16) berechnet sich dann

$$\cos \varphi = \frac{s_1}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2}} = \frac{s_1}{s}.$$

Der Kosinus des Winkels bei (x) ist also, genau ebenso wie in der euklidischen Geometrie, als Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse definiert. Da auch der pythagoräische Satz gilt, so ist mithin die Trigonometrie im Netz der Grenzkreise überhaupt identisch mit der euklidischen, solange man sich auf ein beliebig grosses, jedoch endliches Stück des E_{n-1} beschränkt. Daraus folgt u. a., dass die Grenzkreise kürzeste im E_{n-1} verlaufende Linien sind. Ein im E_{n-1} lokalisierter Beobachter wird die Grenzkreise infolge dieser ihrer geodätischen Eigenschaft als Gerade auffassen und den E_{n-1} als euklidischen Raum interpretieren. Für einen aussenstehenden, im L_n frei beweglichen Beobachter erscheint dieser euklidische Raum E_{n-1} in den nichteuklidischen u. zw. hyperbolischen Raum L_n eingebettet.

Fasst man das Unendlichferne eines euklidischen Raumes, wie es z. B. für 2 Dimensionen in der Funktionentheorie geschieht, als einen einzigen Punkt auf, so macht es keine prinzipiellen Schwierigkeiten, den Einbettungsraum von nächsthöherer Dimensionszahl als hyperbolisch mit einer beliebigen charakteristischen Konstanten c zu denken. Natürlich kann man den Einbettungsraum, wie es naheliegt, auch ebenfalls euklidisch wählen. Welche Wahl man trifft, hängt von Zweckmässigkeitserwägungen, nicht aber von der Natur der Dinge ab. Minkowski wählte für seine Raumzeitwelt⁴⁾ den zweiten Weg, weil das Phänomen der Weltexpansion damals noch unbeachtet resp. unbeobachtet war. Will man aber diese Expansion mitberücksichtigen, so ist der erste Weg mathematisch bequemer.

Wählt man bei $\lambda = 0$ im Gebilde (38) die in den n & ν -Ebenen liegenden $n-1$ Grenzkreise als euklidisch-cartesische Koordinatenachsen und versteht unter s die im \mathbf{E}_{n-1} , also längs einem Grenzkreis gemessene Entfernung eines Punktes des Gebildes vom Ursprung, so sind die euklidischen Koordinaten s_ν dieses Punktes im \mathbf{E}_{n-1} durch

$$s_\nu = s \cdot \cos \varphi_\nu \quad (41)$$

bestimmt, wenn φ_ν der Winkel zwischen dem Bogen s und der ν -Achse ist. Projiziert man nun diesen Punkt aus M auf den mittels $x_n = 0$ definierten Berührungsraum \mathbf{L}_{n-1} , so ist die hyperbolische (geradlinige) Entfernung l der Projektion vom Ursprung durch

$$c \operatorname{th} \frac{l}{c} = s$$

gegeben, und die Verbindungsgerade mit dem Ursprung bildet mit den hyperbolischen Achsen dieselben Winkel φ_ν . Nach (21) und (23) wird daher die hyperbolische Koordinate x_ν dieser Projektion als

$$x_\nu = c \cdot \operatorname{th} \frac{l}{c} \cdot \cos \varphi_\nu = s \cdot \cos \varphi_\nu = s_\nu$$

erkannt. M. a. W., die euklidischen Koordinaten eines Punktes unseres \mathbf{E}_{n-1} sind mit den hyperbolischen Koordinaten der erwähnten Zentralprojektion dieses Punktes im Berührungsraum

⁴⁾ „Raum und Zeit“, Vortrag in Köln 1908, abgedruckt Phys. Ztschr. 10 (1909).

L_{n-1} identisch. Beachtet man nun, dass diese Projektion als derjenige Punkt (s) des L_{n-1} aufgefasst werden darf, den wir bei der Parameterdarstellung (40) benutzten, so folgt:

In der Parameterdarstellung (40) kann man die s_ν auch als euklidische Koordinaten deuten, u. zw. als Koordinaten desjenigen Punktes von (39), der auf der Verbindungsgeraden von M mit dem durch (40) dargestellten Punkt von (38) liegt.

Führt man die Verschiebung $V_n(\lambda)$ aus, die (39) ohne Drehung in (38) überführt, so geht der ursprüngliche Berührungsraum $x_n = 0$ in eine neue Lage $x_n = c \operatorname{th} \lambda$ über; dieser neue Berührungsraum wird von der durch M und (s) gehenden Geraden in einem Punkt (η) getroffen, für den man

$$\eta_\nu = (1 - \operatorname{th} \lambda) s_\nu, \quad \eta_n = c \operatorname{th} \lambda$$

findet. Die euklidischen Koordinatenachsen von (39) werden durch $V_n(\lambda)$ in solche Grenzkreise von (38) übergeführt, die entsprechend in den n & ν -Ebenen von L_n liegen, sich daher auf der n -Achse schneiden, u. zw. in einem Punkt (ξ), wo $\xi_n = c \operatorname{th} \lambda$ ist. Bedeutet l' die hyperbolische Entfernung von (ξ) bis (η), so wird nach (14)

$$c \operatorname{th} \frac{l'}{c} = e^{-\lambda} \sqrt{s_\nu s_\nu} = e^{-\lambda} s, \quad (42)$$

denn $\sqrt{s_\nu s_\nu} = s$. Ist nun A derjenige Punkt, wo die durch M , (s) und (η) gehende Gerade das Gebilde (38) trifft, so wird offenbar $c \operatorname{th} \frac{l'}{c}$ gleich sein der Länge s' des Grenzkreisbogens von (ξ) bis A in (38). Weil nun $V_n(\lambda)$ eine Verschiebung ohne Drehung ist, andererseits der letztgenannte Grenzkreis in der durch (s) und die n -Achse gehenden hyperbolischen Ebene liegt, so ist dieser Grenzkreis als Ganzes aus dem in (39) vom Ursprung nach (s) gehenden Grenzkreis als Ganzes durch die genannte Verschiebung entstanden. Daher bildet der Grenzkreis durch (ξ) und A mit den verschobenen euklidischen Koordinatenachsen dieselben Winkel φ_ν , wie der anfänglich in (39) gelegene, durch den Ursprung und (s) geführte Grenzkreis mit

der dortigen anfänglichen Lage der euklidischen Achsen. Die euklidischen Koordinaten s'_ν des Punktes A in (38) werden daher

$$s'_\nu = s \cdot e^{-\lambda} \cos \varphi_\nu = s_\nu \cdot e^{-\lambda}. \quad (43)$$

Wegen der fundamentalen Bedeutung dieser Relation für alles nachfolgende soll der in (43) enthaltene Gedanke noch in Satzform ausgesprochen werden:

Verschiebt man eine Grenzsphäre im L_n ohne Drehung längs der beständig durch den euklidischen Ursprung dieser Grenzsphäre gehenden Normalen um eine Strecke $q = c\lambda$, so unterscheiden sich die euklidischen Koordinaten der beiden Schnittpunkte mit einer beliebigen anderen Normalen um den Proportionalitätsfaktor $e^{-\lambda}$.

Eine solche Verschiebung ist also gleichbedeutend mit einer Ähnlichkeitstransformation des E_{n-1} , mit dem Ursprung als Fixpunkt und $e^{-\lambda}$ als Vergrößerungsfaktor.

Natürlich sind auf derselben Normalen gelegene Punkte der Grenzsphären, d. h. entsprechende Punkte der Ähnlichkeitstransformation, im allgemeinen durchaus nicht entsprechende Punkte der Verschiebung.

§ 5. Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit im Weltraum. Zum Aufbau einer Kinematik bedarf man gewisser Hypothesen, die eine analoge Rolle spielen, wie die Axiome in der Geometrie. Es sollen demnach im folgenden Hypothesen formuliert werden, die wir unserer expansionistischen Kinematik zugrunde legen. Eine vollständige Aufzählung sämtlicher Hypothesen kinematischen Charakters ist hierbei nicht beabsichtigt, auch soll die Frage der gegenseitigen Abhängigkeit nicht untersucht werden. Die Widerspruchslosigkeit der Hypothesen wird durch die der ganzen Darstellung zugrunde liegende geometrische Interpretation gewährleistet. Uns interessieren hier bloss die Konsequenzen dieser Hypothesen; nur Konsequenzen sind ja überhaupt der experimentellen Nachprüfung zugänglich und deshalb von dauernder Bedeutung. Die Hypothesen sind hier so gewählt, dass sie das Phänomen der Weltexpansion zu einem integrierenden Bestandteil der Kinematik machen.

Hypothese I: Der dreidimensionale Weltraum erweist sich als im grossen euklidisch, wenn man Messungen mittels „starrer“ Massstäbe ausführt und Ausbreitungsbahnen von Fernwirkungen als im allgemeinen gerade Linien deutet. Relativ kleine Abweichungen von der euklidischen Metrik (Krümmungen des Weltraumes) werden durch anwesende Massen bedingt und tragen bloss lokalen Charakter.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns nicht mit dem tatsächlichen, lokal etwas gekrümmten Weltraum E'_3 , sondern mit dem streng euklidischen E_3 , aus welchem dieser E'_3 durch geringfügige lokale Deformationen entstanden gedacht werden kann. M. a. W., die durch Massennähe bedingten lokalen Krümmungen sollen durchweg vernachlässigt werden.

Im E_3 sind Massenpunkte verteilt; in jedem Massenpunkt kann ein Beobachter gedacht werden. Die Bezeichnungen „Massenpunkt“ und „Beobachter“ sollen fernerhin als Äquivalente gelten.

Wir fixieren irgendeinen bestimmten Beobachter. Dieser kann sich durch „Fernsignale“ (Lichtsignale) mit anderen Beobachtern verständigen. Der fixierte Beobachter soll auf irgendeine Weise eine Längeneinheit (cm) und eine Zeiteinheit (sec) definieren und diese seine Definition dann anderen mitteilen, die danach gleichfalls jeder für sich cm- und sec-Etalone anfertigen.

Durch Messungen mit seinen Etalonen findet der fixierte Beobachter eine Strecke c , die er zunächst als Entfernung deuten möge, die von einem Fernsignal in der Zeit 1 sec überbrückt wird (es wird sich später zeigen, dass diese provisorische Auffassung einer kleinen Korrektur bedarf). Messungen haben ergeben:

$$c = 3 \cdot 10^{10} \text{ cm} . \quad (44)$$

Der fixierte Beobachter denke sich nun einen L_4 , in dem die charakteristische Konstante genau den durch (44) angegebenen Wert c hat, und denke sich seinen Weltraum E_3 als dreidimensionale Grenzsphäre in diesen L_4 eingebettet. Dies ist mathe-

matisch statthaft, involviert also keine besondere kinematische Hypothese. Wohl aber soll folgende, mit den bisherigen Erfahrungen übereinstimmende Hypothese gelten:

Hypothese II: Jeder Beobachter findet, wenn er Messungen mit seinen cm- und sec- Etalonen ausführt, für c denselben Zahlenwert (44), d. h. sämtliche Beobachter operieren mit ein und demselben L_4 .

Der fixierte Beobachter wird nun zwei wesentlich verschiedene Koordinatensysteme verwenden können:

Erstens ein euklidisches im E_3 , wo die geodätischen Linien, vom L_4 aus beurteilt, Grenzkreise sind. Den Ursprung dieses euklidischen Koordinatensystems denken wir uns stets dort, wo der fixierte Beobachter sich befindet. Dieses euklidische System bestimmt die Orte sämtlicher anderer Masspunkte im E_3 , also im „Weltraum“ des fixierten Beobachters.

Zweitens ein vierdimensionales hyperbolisches im L_4 , zur Bestimmung der Lage des Weltraumes E_3 im L_4 . Die hyperbolische 4-Achse soll hierbei ständig durch den Ort des fixierten Beobachters im L_4 und den Mittelpunkt M des E_3 hindurchgehen, also jedenfalls orthogonal zum Weltraum gerichtet sein. Als positive Richtung der 4-Achse sei die Richtung nach M hin gewählt. Ferner sollen die euklidischen Achsen in jeder Epoche ein und dieselben Neigungswinkel gegen die hyperbolischen n & ν -Ebenen besitzen. Wir sagen dann, der fixierte Beobachter habe sich auf den Ruhezustand orientiert. Dieser Wortgebrauch stützt sich u. a. auf eine zunächst noch unscharfe Vorstellung vom Nichtvorhandensein einer „Rotation“ der Achsen. Eine präzisere Fassung gewinnt diese Vorstellung erst später, nach Einführung der Hypothese VI (§ 6). Der analytischen Einfachheit halber machen wir weiterhin stets die Annahme, dass die obenerwähnten Neigungswinkel gleich 0 sind, dass also die euklidischen ν -Achsen in den n & ν -Ebenen liegen; der Richtungssinn der hyperbolischen und der euklidischen ν -Achsen soll hierbei übereinstimmen.

Jeder beliebige Beobachter soll sich auf den Ruhezustand orientieren können. Wir fordern nun die Gültigkeit des Relativitätspostulates:

Hypothese III: Sämtliche auf den Ruhezustand orientierten Beobachter sind gleichberechtigt, d. h. universelle, für jeden Punkt des E_3 in jeder Epoche gültige Naturgesetze verhalten sich beim Übergang von einem solchen Beobachter zu einem anderen kovariant.

Die Gesamtheit der Normalen des E_3 bildet vom Standpunkt des auf den Ruhezustand orientierten fixierten Beobachters das Bündel paralleler Gerader mit dem Scheitel M im Mittelpunkt des E_3 . Diese Normalen mögen die Zeitrichtungen in den betreffenden Punkten des E_3 heissen.

Wir formulieren nun die nächste Hypothese, die von fundamentaler Bedeutung für die Erfassung des Expansionsphänomens ist:

Hypothese IV: Ein jeder Massenpunkt verschiebt sich in der Zeitrichtung weg von M . Durch diese erzwungene Verschiebung wird der E_3 mitgeführt, u. zw. nicht nur an der betreffenden Stelle, sondern, infolge eines elastischen Zusammenhanges, als Ganzes. Der E_3 setzt dieser Verschiebung einen starken Widerstand entgegen, indem er sich jeder Ortsänderung im L_4 widersetzt, und übt so auf die Verschiebung der Massen in der Zeitrichtung eine Bremswirkung aus.

Durch diese Bremswirkung ist ein lokaler Druck der Massen auf den elastisch etwas dehnbar gedachten E_3 bedingt; dieser Druck soll sich im E_3 mit Fernsignalgeschwindigkeit ausbreiten und auf diese Weise kleine Deformationen des E_3 (lokale Krümmungen) bewirken, wodurch die Zeitrichtung lokal von der Normalenrichtung etwas abgelenkt erscheint, was dann Tangentialverschiebungen der Massen im E_3 gegeneinander, also Gravitationserscheinungen zur Folge hat. Darauf soll aber in

der vorliegenden Abhandlung, wie schon gesagt, nicht näher eingegangen werden.

Infolge der Bremswirkung liegt es nahe anzunehmen, dass die „Fallgeschwindigkeit“ der Massen in der Zeitrichtung jedenfalls nicht zunimmt. Wir machen die einfachste Annahme einer konstanten Fallgeschwindigkeit und geben dieser Annahme die folgende Form:

Hypothese V: Die vom fixierten Beobachter gemessene „Zeit“ ist proportional der von ihm in der Zeitrichtung im L_4 zurückgelegten Strecke.

Zeitmessungen im E_3 sind demnach gleichbedeutend mit Niveaumessungen im Parallelenbündel M des L_4 .

Beträgt die Verschiebung des fixierten Beobachters in der Zeitrichtung von der Nullepoche an q cm, so wird, wenn t sec verflossen sind,

$$q = -\gamma t, \quad (45)$$

wobei γ die konstante „Fallgeschwindigkeit“ des E_3 im L_4 darstellt. Das Minuszeichen in (45) ist zur Berücksichtigung der Fallrichtung eingeführt: bei positivem γ und positivem t hat man negative q -Werte.

Wir führen noch die Grössen

$$\sigma = \frac{\gamma}{c}, \quad \tau = \frac{c}{\gamma} = \sigma^{-1}, \quad \sigma\tau = 1 \quad (46)$$

ein. Wählt man als Nullepoche diejenige, wo der euklidische Ursprung des fixierten Beobachters mit dem hyperbolischen Ursprung im L_4 zusammenfällt, so wird der in (38) eingehende, die jeweilige Lage des E_3 kennzeichnende Parameter λ infolge $q = c\lambda$

$$\lambda = \frac{q}{c} = -\frac{\gamma}{c} t = -\sigma t. \quad (47)$$

In der Epoche t wird daher die Gleichung des sich im L_4 verschiebenden E_3 lauten:

$$e^{2\sigma t} \cdot F_{xx} - (c - x_4)^2 = 0, \quad (48)$$

was dann für $t = 0$ in (39) übergeht.

Die vom fixierten Beobachter bestimmten euklidischen Koordinaten s , irgendeines sich in seinem Weltraum befindlichen

Massenpunktes werden Funktionen von t sein. Kennt man die s_ν und t , so ist damit auch die Lage des betreffenden Massenpunktes im L_4 mittels (40) definiert, wenn man dort $-\sigma t$ statt λ einführt.

Projiziert man den Ort des Massenpunktes im L_4 aus M auf (39), also auf die Lage des E_3 in der Nullepoche, so erhält man einen Ort, den wir als den reduzierten Ort des Massenpunktes im E_3 ansprechen wollen. Entsprechend soll die Bahn des reduzierten Ortes im E_3 die reduzierte Bahn des Massenpunktes genannt werden. Die euklidischen Koordinaten des reduzierten Ortes von (s) mögen mittels \bar{s}_ν bezeichnet werden. Laut (43) und (47) wird

$$s_\nu = \bar{s}_\nu e^{\sigma t}, \quad \bar{s}_\nu = s_\nu e^{-\sigma t}. \quad (49)$$

Durch Differentiation nach t ergibt sich hieraus, wenn ein Punkt über dem Symbol den Differentialquotienten nach der Zeit andeutet:

$$\dot{s}_\nu = \frac{d\bar{s}_\nu}{dt} e^{\sigma t} + \sigma s_\nu.$$

Der euklidische Vektor $\frac{d\bar{s}_\nu}{dt} e^{\sigma t}$, den wir abkürzend mit v_ν bezeichnen, soll die Eigengeschwindigkeit heissen; den euklidischen Vektor σs_ν , abgekürzt u_ν , nennen wir die Expansionsgeschwindigkeit des betreffenden Massenpunktes. Es wird also

$$\dot{s}_\nu = v_\nu + u_\nu. \quad (50)$$

Die Eigengeschwindigkeit v_ν enthält wohl scheinbar den reduzierten Ort, ist aber tatsächlich von der Wahl der Nullepoche unabhängig, denn sowohl \dot{s}_ν als auch σs_ν sind ja offenbar von der Nullepoche unabhängig. Bei der Substitution $t - t_0$ statt t , wobei t_0 eine beliebige Konstante bedeutet, bleibt also v_ν ungeändert.

Ist beständig $v_\nu = 0$, so muss $\frac{d\bar{s}_\nu}{dt} = 0$ sein, d. h. die reduzierte Bahn schrumpft auf einen Punkt zusammen. Dies findet offenbar dann und nur dann statt, wenn der betreffende Massenpunkt, gesehen im hyperbolischen Koordinatensystem des fixierten Beobachters, sich im L_4 genau in der Zeitrichtung bewegt. Die Zeitrichtung des betreffenden Massenpunktes, wenn er sich auf den Ruhezustand orientiert, wird also mit der vom

fixierten Beobachter für ihn angegebenen Zeitrichtung übereinstimmen, und die Strecke q , um die er sich in dieser Zeitrichtung während eines Zeitintervalles verschiebt, wird der Grösse nach übereinstimmen mit der entsprechenden Strecke q des fixierten Beobachters für dasselbe Zeitintervall. Beide Beobachter werden also im Spezialfall $v_v = 0$ Zeitintervalle vollkommen übereinstimmend beurteilen, also kurz ausgedrückt, identisches Zeitmass verwenden.

Wir betrachten nun den fixierten und einen zweiten Beobachter, für den die Eigengeschwindigkeit gleich Null ist; die euklidischen Achsen dieser beiden Beobachter im E_3 mögen entsprechend parallel gewählt sein. Es seien nun s'_v die euklidischen Koordinaten irgendeines dritten Massenpunktes nach Ansicht des fixierten, und s''_v die Koordinaten desselben dritten Massenpunktes nach Ansicht des zweiten Beobachters. Da es sich um euklidische Geometrie bei parallelen Achsen handelt, wird $s''_v = s'_v - s_v$ sein, wenn s_v die Koordinaten des zweiten Beobachters in bezug auf den fixierten sind. Für die reduzierten Koordinaten \bar{s}'_v und \bar{s}''_v findet man aus $\bar{s}'_v = s'_v e^{-\sigma t}$, $\bar{s}''_v = s''_v e^{-\sigma t}$, da t in beiden Fällen ein und dieselbe Grösse bedeutet (vorausgesetzt, dass die Nullepochen übereinstimmen):

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{s}'_v}{dt} e^{\sigma t} &= \dot{s}'_v - \sigma s'_v \\ &= \dot{s}_v + \dot{s}''_v - \sigma s'_v \\ &= \sigma s_v + \dot{s}''_v - \sigma s'_v \\ &= \dot{s}''_v - \sigma s''_v \\ &= \frac{d\bar{s}''_v}{dt} e^{\sigma t}, \end{aligned}$$

denn infolge $v_v = 0$ ist $\dot{s}_v = \sigma s_v$. Dieses Ergebnis zeigt, dass der dritte Massenpunkt nach Ansicht sowohl des fixierten, als auch des zweiten Beobachters ein und dieselbe Eigengeschwindigkeit

$$\frac{d\bar{s}'_v}{dt} e^{\sigma t} = \frac{d\bar{s}''_v}{dt} e^{\sigma t}$$

besitzt. Für zwei solche Beobachter mit übereinstimmendem Zeitmass ist also die Eigengeschwindigkeit eines beliebigen dritten Massenpunktes eine Invariante. Ist speziell diese Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt des fixierten Beobachters gleich

Null, so ist sie es auch vom Standpunkt des zweiten Beobachters, und der dritte Punkt hat dann wieder mit den beiden ersten übereinstimmendes Zeitmass.

Die Gesamtheit solcherweise definierter Beobachter mit gleichem Zeitmass bildet ein System, in dem jeder nach Ansicht eines jeden anderen die Eigengeschwindigkeit Null besitzt, und sich im L_4 also genau in der Zeitrichtung bewegt. Ein solches System von Beobachtern soll ein Inertialsystem heissen. Die Eigengeschwindigkeit eines beliebigen Massenpunktes hat in bezug auf einen beliebigen Beobachter aus einem Inertialsystem ein und denselben Wert; man darf daher von der Eigengeschwindigkeit des Massenpunktes in bezug auf das Inertialsystem sprechen. Bildet man noch auf dieselbe Art das Inertialsystem dieses Massenpunktes, so soll die Eigengeschwindigkeit des letzteren als Eigengeschwindigkeit des zweiten Inertialsystems in bezug auf das erste Inertialsystem bezeichnet werden.

Die Expansionsgeschwindigkeit eines beliebigen Massenpunktes wird dagegen als reine Ortsfunktion von verschiedenen Beobachtern in einem Inertialsystem stets verschieden beurteilt werden, wie aus der Definition der Expansionsgeschwindigkeit sofort abzulesen ist. Sind O und O' zwei ein und demselben Inertialsystem angehörige Beobachter, A ein von beiden beobachteter dritter Massenpunkt, so wird das linear σ -fach vergrösserte euklidische Dreieck $OA O'$ drei Expansionsgeschwindigkeiten angeben: $\sigma \cdot \overrightarrow{OA}$ ist die Expansionsgeschwindigkeit von A in bezug auf O , $\sigma \cdot \overrightarrow{O'O}$ diejenige von O' in bezug auf O , endlich $\sigma \cdot \overrightarrow{O'A}$ diejenige von A in bezug auf O' . Wir fassen diesen Sachverhalt kurz im Satz zusammen: Die Expansionsgeschwindigkeiten addieren sich euklidisch.

Da die Expansionsgeschwindigkeit proportional der Entfernung wächst, die Eigengeschwindigkeit dagegen bei Änderung des Beobachters im Inertialsystem sich nicht ändert, so wird bei wachsender Distanz des beobachteten Objekts die Expansionsgeschwindigkeit stark überwiegen. Bei sehr grossen Entfernungen wird man praktisch nur die Expansionsgeschwindigkeit zu berücksichtigen haben. Aus bisherigen spektrosko-

pischen Beobachtungen abgeleitetes Zahlenmaterial ergibt für $\Delta t = 1 \text{ sec}^5$:

$$\frac{\Delta s}{s} = 1,6 \cdot 10^{-17}.$$

Deutet man $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ unter Vernachlässigung von v , als reine Expansionsgeschwindigkeit $u = \sigma s$, so darf man

$$\sigma = \frac{\Delta s}{s \cdot \Delta t}$$

setzen und findet hiernach:

$$\begin{aligned}\sigma &= 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1} \\ \tau &= 6,2 \cdot 10^{16} \text{ sec} \\ \gamma &= \sigma c = 4,8 \cdot 10^{-7} \text{ cm sec}^{-1}.\end{aligned}\tag{51}$$

Wir wollen die Näherungswerte (51) bei allen ferneren Zahlenbeispielen als Rechnungsgrundlagen benutzen. Danach „fällt“ also der E_3 im L_4 um 1 cm in ca. $2 \cdot 10^6 \text{ sec}$, d. h. in ungefähr 23 Tagen. Man hat natürlich in Betracht zu ziehen, dass die Zahlen (51) in Zukunft eine Korrektur erfahren werden. Auch die grundlegenden astrophysikalischen Formeln, die bei der Bearbeitung des Beobachtungsmaterials Verwendung finden, bedürfen einer Korrektur, wie im § 8 gezeigt werden soll.

§ 6. Addition von Eigengeschwindigkeiten. Bei Beobachtungen in relativ „kleinen“, etwa intragalaktischen Entfernungen wird die Eigengeschwindigkeit dominieren, weil σ , wie (51) zeigt, sehr klein ist und demnach auch $u = \sigma s$ dann klein ausfällt. Diesbezügliche Messungen haben in diesem Rahmen die Berechtigung der Einstein'schen Kinematik indirekt bestätigt, oder zum mindesten nicht widerlegt. Dies weist darauf hin, dass die Addition von Eigengeschwindigkeiten sich nicht nach euklidischen Gesetzen, sondern, wie es die Relativitätstheorie implizite fordert, ohne zwischen Eigen- und Expansionsgeschwindigkeiten zu unterscheiden, nach Additionsgesetzen hyperbolischer Vektoren vollzieht. Unser System von Hypothesen muss daher noch in diesem Sinne ergänzt werden.

⁵⁾ Nach einem Referat von D. Rootsmann (Tartu Tähetorni Kalender 1935). E. Hubble and M. L. Humason, *Astrophys. J.* 74 (1931) „The Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae“ geben den Wert 558 km/sec per million parsecs, was $1,8 \cdot 10^{-17} \text{ sec}^{-1}$ entspricht. Die Unsicherheit wird von Astronomen auf 20% eingeschätzt.

Wir denken uns den im E_3 definierten euklidischen Vektor v mit den Komponenten v_p , einem hyperbolischen Vektor im L_4 assoziiert. Der assoziierte hyperbolische Vektor werde als derjenige Tangentenabschnitt von der Länge l interpretiert, welcher gemäss § 4 die Länge v eines Grenzkreisbogens mittels

$$v = c \operatorname{th} \frac{l}{c}, \quad v = \sqrt{v_p v_p} \quad (52)$$

bestimmt. Denkt man sich den euklidischen Vektor v als Grenzkreisbogenstück im E_3 für die Epoche $t = 0$ an den Ursprung geheftet, so sind die Komponenten v_p zugleich die hyperbolischen Koordinaten der Projektion des zweiten Endpunktes des Bogenstückes aus M auf den Berührungsraum L_3 ($x_4 = 0$). Wir assoziieren nun den hyperbolischen Punkt (v) im L_3 dem euklidischen Vektor v . Durch diesen Punkt (v) des L_3 ist ein hyperbolischer Vektor bestimmt, der im L_3 liegt, vom Ursprung ausgeht und in den Punkt (v) mündet; die Zuordnung dieses dem euklidischen Vektor aus E_3 assoziierten hyperbolischen Vektors⁶⁾ im Berührungsraum L_3 ist eineindeutig. Je nachdem die Eigengeschwindigkeit v kleiner als c , gleich c oder grösser als c ist, wird der assoziierte Punkt im hyperbolischen L_3 in das eigentliche, das unendlich ferne oder in das ideelle Gebiet fallen. Nur im ersten Falle $v < c$ wird der assoziierte hyperbolische Vektor ein eigentlicher sein, d. h. ausschliesslich aus eigentlichen Punkten des L_3 bestehen. Der zweite Fall $v = c$ entspricht einem unendlich langen hyperbolischen Vektor, was als Grenzfall eigentlicher Vektoren gelten kann. Im dritten Falle wäre die Länge des assoziierten hyperbolischen Vektors eine komplexe Zahl.

Wir wollen nun bei der Bewegung von Massenpunkten überhaupt nur den Fall eines eigentlichen assoziierten Vektors als realisierbar ansehen, formulieren demnach die

Hypothese VI: Die Eigengeschwindigkeit eines Massenpunktes im E_3 kann den Grenzwert c nicht erreichen, geschweige denn übersteigen.

Erst durch diese Forderung erhält die im § 5 erwähnte Vorstellung vom Nichtvorhandensein einer „Rotation“ der Achsen

⁶⁾ Diese Zuordnung verwendet faktisch V. Varičák in seiner Abhandlung „Über die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie“ (Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. XXI, 1912).

einen präzisen Sinn. Solange keine obere Grenze für Eigengeschwindigkeiten festgesetzt ist, existiert kein durch „Nichtrotation“ ausgezeichnetes Achsensystem. In der vorliegenden Darstellung ist eben ein Achsensystem dann frei von Rotation (ein galileisches System), wenn die Hypothese VI erfüllt ist.

Fernsignale, die ja nicht durch eigentliche Massenbewegung ersetzt werden können, sondern auf einem Zusammenhang des E_3 in sich beruhen, sollen sich im ungekrümmten E_3 mit der Eigengeschwindigkeit c per sec ausbreiten. Im Interesse einer Vereinheitlichung der Kinematik wählen wir noch die folgende

Hypothese VII: Die Ausbreitung von Fernwirkungen im E_3 erfolgt so, als ob es sich um eine Bewegung von Massen mit der Eigengeschwindigkeit c handelte.

Der Grenzwert c der Eigengeschwindigkeit wird also nach dieser Annahme bei einer Bewegung tatsächlicher Massen nie erreicht, wohl aber bei den auf Elastizität beruhenden Fernsignalen dennoch realisiert. Dies ist nicht paradoxaler, als die empirisch feststehende Tatsache, dass Fernwirkungen tatsächlich massenfreie Distanzen überbrücken. Ob man sich den Träger E_3 der Fernwirkungen hierbei als Substanz (Äther), oder einfach als ein Gewebe geodätischer Linien vorstellt, ist für den mathematischen Kern der Sache ohne Belang.

Die euklidische Addition der Expansionsgeschwindigkeiten ist eine logische Konsequenz der Hypothesen IV und V. Es ist eine ebensolche logische Konsequenz von VI, dass Eigengeschwindigkeiten sich nicht gleichfalls euklidisch addieren können, wenn man von einem Inertialsystem zu einem anderen übergeht, weil bei einer euklidischen Addition c erreicht und überschritten werden könnte.

Nach II und VII muss bei einem solchen Übergang von dem einen System zu dem anderen die Eigengeschwindigkeit c sich kovariant verhalten. Dies bedeutet in Übertragung auf die assoziierten hyperbolischen Vektoren im L_3 , dass einem Punkt des u. f. Gebildes

$$c^2 - v_\nu v_\nu = 0 \quad (53)$$

des L_3 bei einem solchen Übergang stets wieder ein Punkt desselben Gebildes entsprechen muss. Nach § 1 ist es daher nahe-

liegend, diesen Übergang formal als eine Bewegungstransformation (4) des hyperbolischen Raumes L_3 zu interpretieren. Wir kommen so zur

Hypothese VIII: Ist w eine Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt eines ersten Inertialsystems, w' die entsprechende Eigengeschwindigkeit vom Standpunkt eines zweiten Inertialsystems, ferner v die Eigengeschwindigkeit des zweiten Systems in bezug auf das erste, so ist (w') im Berührungsraum L_3 derjenige Punkt, in den (w) übergeht, wenn man den L_3 längs dem v assoziierten hyperbolischen Vektor um die Länge dieses assoziierten Vektors in negativer Richtung verschiebt.

Der Übergang von einem Inertialsystem zu einem anderen bedeutet also, kurz ausgedrückt, eine Addition der den Eigengeschwindigkeiten assoziierten hyperbolischen Vektoren im L_3 .

Wir wollen uns bei einer Aufzählung plausibler Gründe für die Hypothese VIII hier nicht aufhalten, sondern begnügen uns mit dem Hinweis, dass sie identisch ist mit dem Gesetz der Addition der Geschwindigkeiten nach der Einstein'schen Theorie, sobald man einfach von Geschwindigkeiten statt von Eigengeschwindigkeiten spricht, also $\sigma = 0$ setzt.

In analytischer Form ergeben sich die Formeln für eine Transformation der Eigengeschwindigkeit nach VIII aus (10), wenn man von einer möglichen Neigung der Achsen des einen Systems gegen die Achsen des anderen Systems absieht, also nur parallele Achsensysteme berücksichtigt. Da wir nun mit unhomogenen Koordinaten w_ν operieren, so tritt an die Stelle der homogenen Transformationsform (10) die gebrochene:

$$w_\mu = \frac{w'_\mu + (ch\omega - 1)a_\mu a_\nu w'_\nu + c a_\mu sh\omega}{\frac{1}{c}a_\nu \omega'_\nu sh\omega + ch\omega}, \quad (54)$$

wo a_ν die Richtungskosinus des Vektors v , also

$$\alpha_v = \frac{v_v}{v}, \quad v = \sqrt{v_v v_v} \quad (55)$$

bedeuten, und ω durch

$$v = c \operatorname{th} \omega \quad (56)$$

definiert ist.

Statt der abstrakten analytischen Formel kann man natürlich auch die anschaulichere Methode der direkten Betrachtung des aus den w , w' und v assoziierten hyperbolischen Vektoren zusammengesetzten Dreiecks im L_3 anwenden.

Es folgen zwei Beispiele⁷⁾:

1. Beispiel: (v) und (w) liegen auf einer Geraden, als welche man stets die 1-Achse wählen kann. Es ist dann $a_1=1$, $a_2=a_3=0$; $v_1=v=c \operatorname{th} \omega$, $v_2=v_3=0$; $w_1=w$, $w_2=w_3=0$. Nach (6) folgt nun sofort $w'_2=w'_3=0$, also $w'_1=w'$ und

$$w = \frac{w' \operatorname{ch} \omega + c \operatorname{sh} \omega}{\frac{1}{c} w' \operatorname{sh} \omega + \operatorname{ch} \omega} = \frac{v + w'}{1 + \frac{v w'}{c^2}},$$

also die bekannte Einstein'sche Formel, die sich dort aber auf Geschwindigkeiten überhaupt, hier bloss auf Eigengeschwindigkeiten bezieht. Führt man statt w , w' , v entsprechende Längen $c\theta$, $c\theta'$, $c\omega$ assoziierter hyperbolischer Vektoren ein, so erhält diese Formel die prägnantere Gestalt

$$\operatorname{th} \theta = \operatorname{th} (\omega + \theta'). \quad (57)$$

2. Beispiel: Aberration. Ein und derselbe Lichtstrahl (Fernsignal) trifft den fixierten und den koinzidierenden, mit der Eigengeschwindigkeit v vorübereilenden Beobachter. Statt (54) soll die Trigonometrie des hyperbolischen Vektorendreiecks verwendet werden. In der Fig. 1 liegt die Spitze C des Vektorendreiecks

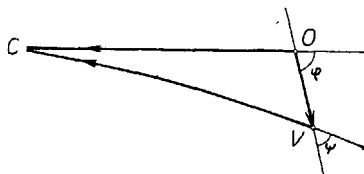


Fig. 1.

OVC im Unendlichen; OV stellt den v assoziierten hyperbolischen Vektor von der Länge $c\omega$ dar, OC die vom fixierten Beobachter gesehene Lichtgeschwindigkeit (assoziierter Vektor), VC dieselbe

⁷⁾ Vgl. V. Varičák, l. c.

Lichtgeschwindigkeit vom Standpunkt des bewegten Beobachters. Der fixierte Beobachter sieht die Lichtquelle in einer um den Winkel φ gegen die Bahn des zweiten Beobachters geneigten Richtung; der zweite Beobachter schätzt diesen Winkel als ψ . Da auch in der hyperbolischen Geometrie ein Aussenwinkel im Dreieck stets grösser ist als ein nichtanliegender Innenwinkel, so wird sicher $\psi < \varphi$. Die Differenz $\delta = \varphi - \psi$ bildet den Aberrationswinkel. Eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie ergibt für den vorliegenden Fall eines imaginären Sphärenradius ci , wenn man in Betracht zieht, dass der Winkel bei C , wie aus dem Sinussatz folgt, gleich Null ist:

$$1 = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi \operatorname{ch} \omega.$$

Dies bedeutet eine quadratische Gleichung für $\tan \psi$, aus der man für den richtigen, nämlich den kleineren Wert von ψ findet:

$$\tan \psi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi \operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega}.$$

Mit Hilfe der ersten Gleichung folgt hiernach:

$$\cos \psi = \frac{\cos \varphi \operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega}{\operatorname{ch} \omega + \cos \varphi \operatorname{sh} \omega},$$

oder, wenn man $\frac{v}{c}$ statt $\operatorname{th} \omega$ einführt:

$$\cos \psi = \frac{v + c \cdot \cos \varphi}{c + v \cdot \cos \varphi}. \quad (58)$$

Bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hätte man demnach $\cos \psi = \frac{v}{c}$, während die klassische Theorie $\cot \psi = \frac{v}{c}$ ergibt. Der Aberrationswinkel δ , der übrigens dem Flächeninhalt des Dreiecks OVC proportional ist, wird ein Maximum für

$$\cos \varphi = -\tan \frac{\omega}{2}.$$

Es ist dann $\psi = \pi - \varphi$ und

$$\sin \delta_{\max} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\omega}{2}},$$

was bei kleinem ω dem Wert $\frac{v}{c}$ nahe kommt.

Werden die Beobachter vertauscht, so hat man es mit den Nebenwinkeln von φ und ψ zu tun; in den Formeln bleibt dabei bei passender Änderung der Bezeichnungen alles beim alten. Es ist also prinzipiell gleichgültig, welcher der beiden Beobachter als der fixierte, welcher als der bewegte gilt. In der klassischen Theorie ist dies bekanntlich nicht der Fall.

Die hier angegebene Aberrationstheorie ist identisch mit der Einstein'schen, weil es sich um den gerade beim fixierten Beobachter, also in der Distanz Null, eintreffenden Lichtstrahl handelt, die Expansionsgeschwindigkeit also gleich Null ist und einzig die Eigengeschwindigkeit übrigbleibt. Dagegen wird im analytischen Ausdruck des Doppler-Effekts, wie im § 8 dargelegt werden soll, eine Abweichung von der Einstein'schen Theorie stattfinden, weil in dieser Frage die Entfernung der Lichtquelle vom Beobachter eine wesentliche Rolle spielt.

§ 7. Translatorische Bewegung. Die vom Massenpunkt im E_3 beschriebene Bahn ergibt sich aus (50) durch Integration.

Ist die Eigengeschwindigkeit konstant, d. h. sind die v_ν von t unabhängig, so nennen wir die Bewegung eine translatorische, oder auch kurz eine Translation. Handelt es sich um Translation, so findet man aus (50):

$$\tau \log \frac{v_\nu + \sigma s_\nu}{v_\nu + \sigma S_\nu} = t,$$

wenn S_ν die euklidischen Koordinaten des Massenpunktes in der Epoche $t=0$ sind. Hieraus folgt:

$$s_\nu = (S_\nu + \tau v_\nu) e^{t/\tau} - \tau v_\nu. \quad (59)$$

Da mithin

$$\frac{s_\nu + \tau v_\nu}{S_\nu + \tau v_\nu}$$

für alle ν den gleichen Wert hat, so ist die Bahn im E_3 eine Gerade, u. zw. mit den Richtungskosinus

$$\frac{S_\nu + \tau v_\nu}{\sqrt{S_\nu S_\nu + \tau^2 v_\nu v_\nu + 2 \tau S_\nu v_\nu}} \quad (60)$$

Schreibt man hier S^2 für $S_\nu S_\nu$, v^2 für $v_\nu v_\nu$, so ist $S_\nu v_\nu$ als skalar-
lares Produkt von S und v gleich $Sv \cos \Theta$, wenn Θ den Winkel

zwischen den Vektoren S und v bedeutet. Der Nenner in (60) wird dann

$$\sqrt{S^2 + \tau^2 v^2 + 2 S \tau v \cos \Theta}, \quad (61)$$

was identisch ist mit der Länge der dritten Seite eines euklidischen Dreiecks, in dem zwei Seiten entsprechend die Längen S und τv haben und den Winkel $\pi - \Theta$ einschliessen. Dies bezeugt, dass dieser Nenner nur dann gleich Null ausfällt, wenn S und τv gleich lang sind und $\pi - \Theta = 0$ wird, m. a. W., wenn der Vektor S mit dem Vektor $-\tau v$ identisch ist. In diesem singulären Fall zeigt aber dann (59) $s_\nu = S_\nu$, d. h. der Massenpunkt verbleibt im E_3 die ganze Zeit über an einem Ort, obgleich er eine von Null verschiedene Eigengeschwindigkeit besitzt: letztere wird dann eben von der Expansionsgeschwindigkeit kompensiert. Diese scheinbare Gleichgewichtslage ist eine labile; beim Übergang zu einem beliebigen anderen Beobachter innerhalb desselben Inertialsystems wird die Kompensation zerstört. Andererseits lässt sich für einen vorgegebenen in Translation begriffenen Massenpunkt in einem vorgegebenen Inertialsystem stets ein und nur ein Beobachter angeben, für den die Bewegung des erwähnten Massenpunktes einen solchen singulären Charakter zeigt, allerdings unter der fingierten Voraussetzung, dass man Beobachter im Inertialsystem kontinuierlich verteilen kann. Bei derselben Fiktion wird ein beliebiger Beobachter aus einem Inertialsystem in einem beliebigen anderen Inertialsystem einen und nur einen Fixpunkt konstatieren. Die Wahrscheinlichkeit einer tatsächlichen Beobachtung derartiger Singularitäten am Sternenhimmel ist sehr gering, weil wirkliche Beobachter nur an vereinzelten Stellen des Welt- raumes auftreten.

Wir wenden uns nun zum allgemeinen, nicht singulären Fall. Wäre $\sigma = 0$, also keine Expansionsgeschwindigkeit vorhanden, so müssten die Richtungskosinus der Bahngeraden proportional den v_ν sein. Der Einfluss des Expansionskoeffizienten σ äussert sich also zunächst in einer Ablenkung der Bahn. Da σ sehr klein ist, so wird diese Ablenkung nur für sehr grosse Werte von S_ν bemerkbar.

Die Bahn ist wohl geradlinig, erstreckt sich aber nur in der Richtung positiv wachsender Zeiten t ins Unendliche; bei negativ unbeschränkt wachsendem t nähert man sich auf

der Bahngeraden asymptotisch demjenigen Punkt des E_3 , dessen Koordinaten die Werte $-\tau v$, haben, wie aus (59) ersichtlich wird. Die Bahn ist also eine von diesem Punkt ausgehende Halbgerade. Den Anfangspunkt ($-\tau v$) dieser Halbgeraden könnte man den Fluchtpunkt der Bahn nennen. Sämtliche Massenpunkte mit ein und derselben Eigengeschwindigkeit, also sämtliche ein und demselben Inertialsystem angehörige Punkte, zeigen ein und denselben Fluchtpunkt, scheinen also aus ein und demselben Punkt des Weltraumes hervorzquellen. Im singulären Fall hat man statt der Halbgeraden nur noch den Fluchtpunkt ($-\tau v$).

Für die kleine Eigengeschwindigkeit $v = 1 \text{ cm sec}^{-1}$ liegt der Fluchtpunkt in der Entfernung ca. $0,6 \cdot 10^{12} \text{ km}$, also weit hinter den wahrscheinlichen Grenzen unseres Planetensystems.

Die Fluchtpunkte für einen gegebenen Absolutwert von v liegen im E_3 auf einer Sphäre vom Radius τv um den Beobachter herum. Die umfassendste dieser Sphären hat den Radius τc , d. h. ungefähr $6 \cdot 10^8 \text{ Parsec}$. Diese grösste Sphäre soll die Sichtsphäre des Beobachters heissen. Sämtliche Fluchtpunkte liegen innerhalb der Sichtsphäre. Der fixierte Beobachter hält seine Sichtsphäre für unveränderlich, die Sichtsphären sämtlicher anderer zu seinem Inertialsystem gehörigen Beobachter dagegen für beweglich, jedoch so, dass vor genügend langer Zeit die Sichtsphäre eines beliebigen solchen Beobachters der seinigen beliebig nahe kam. Dergleichen sind die Fluchtpunkte nach Ansicht verschiedener Beobachter aus ein und demselben Inertialsystem verschieden, jedoch wird wiederum der Unterschied beliebig klein, wenn man genügend weit in die Vergangenheit zurückgreift.

Da der Fluchtpunkt stets innerhalb der Sichtsphäre liegt und die Bahn sich, ausgenommen den singulären Fall, ins Unendliche erstreckt, wenn t positiv wächst, so wird im allgemeinen für jede Eigengeschwindigkeit, auch für $v = 0$, die Bahn einmal die Sichtsphäre schneiden, der Massenpunkt also aus der Sichtsphäre heraustreten. Von jedem Inertialsystem wird auf die Dauer einzig und allein ein Massenpunkt, nämlich der singuläre, innerhalb der Sichtsphäre verbleiben. Der Austrittsmoment lässt sich zwar bei bekannten Daten theoretisch berechnen, nicht aber tatsächlich beobachten, aus Gründen, die im § 8 dargelegt werden sollen.

Die Bahnlänge eines in translatorischer Bewegung begriffenen Punktes für ein Zeitintervall Δt wird von verschiedenen Beobachtern aus ein und demselben Inertialsystem verschieden eingeschätzt werden, bildet also keine Invariante im Inertialsystem. Dagegen wird eine Invariante erhalten, wenn man den Ortsunterschied berechnet zwischen demjenigen Ort, wo der Massenpunkt im Moment t sich tatsächlich befindet, und demjenigen Ort, wo er sich befinden würde, wenn seine Eigengeschwindigkeit von einem fixierten, sonst aber beliebigen Moment t_0 an gleich Null wäre, d. h. wenn der Massenpunkt vom Moment t_0 an zum Inertialsystem des Beobachters gehören würde. Es handelt sich hierbei also um die Berechnung der Verschiebung relativ zum Inertialsystem des Beobachters.

Nach (59) bestimmt sich der Ort des Massenpunktes für die Epoche t_0 aus

$$s_v = (S_v + \tau v_v) e^{\sigma t_0} - \tau v_v .$$

Wenn nun im Laufe der nächsten $t - t_0$ Sekunden die Eigengeschwindigkeit des Punktes Null wäre, so hätte man nach § 4 für den Ort im Moment t die Koordinaten $s_v e^{\sigma(t - t_0)}$, also

$$[(S_v + \tau v_v) e^{\sigma t_0} - \tau v_v] e^{\sigma(t - t_0)},$$

oder

$$(S_v + \tau v_v) e^{\sigma t} - \tau v_v e^{\sigma \cdot \Delta t}, \quad \Delta t = t - t_0 .$$

In Wirklichkeit werden aber die Koordinaten des Massenpunktes im Moment t nach (59) lauten:

$$(S_v + \tau v_v) e^{\sigma t} - \tau v_v .$$

Für die euklidische Distanz D zwischen dem zuerst genannten fiktiven und dem wirklichen Ort findet man hieraus

$$D = \sqrt{\tau^2 (e^{\sigma \cdot \Delta t} - 1)^2 v_v^2} = \tau v (e^{\sigma \cdot \Delta t} - 1) . \quad (62)$$

Diese Grösse D hängt nur von v und Δt ab, ändert sich also tatsächlich nicht beim Beobachterwechsel innerhalb eines Inertialsystems. Wir wollen D die relative Bahnlänge nennen.

Entwickelt man nach Potenzen von $\sigma \cdot \Delta t$, so folgt aus (62):

$$D = v \cdot \Delta t \left[1 + \frac{\sigma \cdot \Delta t}{2!} + \frac{(\sigma \cdot \Delta t)^2}{3!} + \dots \right]. \quad (63)$$

Infolge der Kleinheit von σ ist demnach die klassische Formel

$$D = v \cdot \Delta t$$

für genügend kleine Zeitintervalle Δt eine sehr gute Annäherung. Bei $v = c$ und $\Delta t = 1$ sec würde die Korrektur ungefähr $+ 2,5 \cdot 10^{-6}$ mm betragen. Dies besagt u. a., dass die im § 5 anlässlich der Hypothese II gegebene provisorische Definition der Konstanten c etwas berichtigt werden muss: in 1 sec wird vom Fernsignal im Inertialsystem des fixierten Beobachters nicht genau die Strecke c , sondern eine um etwa 25 Ångström-Einheiten grössere Entfernung überbrückt. Eine so präzise Bestimmung von c ist natürlich bei praktischer Messung undurchführbar.

Wäre $\sigma = 0$, also keine Expansion vorhanden, so würde D mit dem klassischen Begriff der bei gleichförmiger Bewegung durchlaufenen Bahnstrecke übereinstimmen. Auch bei der klassischen Auffassung handelt es sich aber hierbei im Grunde genommen stets um die Grösse der Verschiebung gegen das Inertialsystem des Beobachters.

§ 8. Anwendung auf Fernsignale. Auf Grund von VII sind Fernsignale wie translatorische Bewegungen mit der Grenzeigengeschwindigkeit c zu behandeln. Die Formel (62) gilt demnach auch für Fernsignale. Es sollen die Konsequenzen von (62) für diesen Spezialfall nun näher untersucht werden.

Es sei q die Entfernung eines Objekts im E_3 vom fixierten Beobachter in einem Moment t_0 . Das Objekt sende in diesem Moment ein Fernsignal (Lichtstrahl) aus, das vom fixierten Beobachter im Moment $t_0 + L$ empfangen wird. Man hat dann $\Delta t = L$, und die relative Bahnlänge des Fernsignals vom Moment der Emission bis zum Moment des Empfanges wird nach (62) gleich $\tau c (e^{\sigma L} - 1)$. Indem wir die entsprechende Begriffsbildung der Relativitätstheorie verallgemeinern, nennen wir diese Grösse die dem Zeitintervall L entsprechende Lichtzeit l :

$$l = \tau c (e^{\sigma L} - 1). \quad (64)$$

Auf Grund der im vorigen Paragraphen gegebenen Definition der relativen Bahnlänge wird nun l gleich sein der Distanz, die die Lichtquelle im Moment $t_0 + L$ vom fixierten Beobachter

hätte, wenn sie vom Moment der Emission an zum Inertialsystem des fixierten Beobachters gehören würde, also gleich $qe^{\sigma L}$. Aus der somit resultierenden Gleichung

$$\tau c (e^{\sigma L} - 1) = q e^{\sigma L}$$

folgt, wenn man statt σq die entsprechende Expansionsgeschwindigkeit u einführt, zunächst:

$$e^{\sigma L} = \frac{c}{c - u}, \quad (65)$$

und wenn man dies in $q e^{\sigma L}$ einsetzt:

$$l = \frac{q}{1 - \frac{u}{c}} = q \left(1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{c^2} + \dots \right), \quad (66)$$

Nach der klassischen Theorie wäre die scheinbare Helligkeit des Objekts proportional q^{-2} . Da aber das Signal während der Laufzeit L im Inertialsystem offenbar die Oberfläche einer Sphäre mit dem Radius l erreicht hat, so wird die Intensität des im Zeitpunkt $t_0 + L$ empfangenen Signals umgekehrt proportional der Oberfläche dieser Sphäre, also proportional l^{-2} anzunehmen sein. Wegen $l > q$ wird die Intensität hiernach bei grossen Werten von q beträchtlich geringer sein, als es die klassische Theorie annimmt. Bei mässigen Entfernungen ist übrigens der Unterschied noch sehr gering. So findet man für $q = 10$ Par-sec (etwa α *Ursae minoris*)

$$\frac{u}{c} = 1,6 \cdot 10^{-8}, \quad l^{-2} \approx (1 - 3,3 \cdot 10^{-8}) q^{-2}.$$

Dieser Unterschied ist unmessbar klein. Für die zurzeit schon gemessene Expansionsgeschwindigkeit $20\,000 \text{ km sec}^{-1}$ berechnet sich

$$\frac{u}{c} = 0,067, \quad l = 1,07 q, \quad l^{-2} = 0,87 q^{-2},$$

was einem Helligkeitsunterschied von ca 0,15 Grössenklassen entspricht. Bei weiterem Eindringen in die Tiefen des Universums werden die Helligkeitsunterschiede gegen die klassische Annahme schon fühlbarer. Geht man z. B. von den Objekten, deren Expansionsgeschwindigkeit $20\,000 \text{ km sec}^{-1}$ beträgt, noch um drei Helligkeitsgrössenklassen weiter, so wird die scheinbare Helligkeit 16 mal geringer, nach der klassischen Theorie q also 4 mal grösser, wonach man geneigt wäre als Expansions-

geschwindigkeit zu erwarten $80\,000\text{ km sec}^{-1}$. Auf Grund der hier entwickelten Theorie wird aber nicht q , sondern l nun 4 mal grösser, q dagegen bloss 3,3 mal grösser, und man wird also nur eine Expansionsgeschwindigkeit von ca. $67\,000\text{ km sec}^{-1}$ erreichen. Da es sich hier um eine Differenz von 16% in der spektroskopisch zu messenden Geschwindigkeit handelt, so hat man hierin die Möglichkeit einer experimentellen Prüfung des Helligkeitsgesetzes. Bei der Diskussion der Resultate einer solchen Prüfung wäre jedoch zu berücksichtigen, dass die Voraussage bloss als eine sehr grobe Annäherung zu gelten hat, weil das zugrunde gelegte σ noch sehr unsicher ist, die Resultate der Rechnung aber fühlbar von dem für σ angenommenen Werte abhängen, da alles von der in (66) eingehenden Grösse $\frac{u}{c}$ d. h. $\frac{\sigma q}{c}$ stark beeinflusst wird. Jedenfalls ist aber mit einiger Sicherheit zu erwarten, dass wenn die Resultate der ferneren Beobachtungen für grosse Tiefen vom Standpunkt der klassischen Theorie bearbeitet werden, eine Verlangsamung der Expansion in Erscheinung treten muss. Wenn das tatsächlich der Fall sein sollte, wird die hier entwickelte Theorie, als „bequemere“ im Poincaré'schen Sinne, den Vorzug verdienen.

Aus (65) folgt für die Laufzeit L des Fernsignals:

$$L = -\tau \log\left(1 - \frac{\sigma q}{c}\right) = \frac{q}{c} \left(1 + \frac{u}{2c} + \frac{u^2}{3c^2} + \dots\right). \quad (67)$$

Diese Laufzeit wird demnach ins unendliche wachsen, wenn das leuchtende Objekt innerhalb der Sichtsphäre sich der Peripherie dieser Sichtsphäre beliebig nähert. Der fixierte Beobachter wird daher zu jeder Zeit jedes beliebige leuchtende Objekt theoretisch noch „sehen“ können, den Austritt aus der Sichtsphäre, der doch, wie im vorigen Paragraphen dargelegt, bei konstanter Eigengeschwindigkeit nach endlicher Zeit stattfinden muss, nie „beobachten“ können. Bei all dem ist aber noch in Betracht zu ziehen, dass die scheinbare Helligkeit des Objekts bei $q \rightarrow \tau c$ dem Grenzwert 0 zustreben wird, wie aus (66) zu folgern ist, weil dann $l \rightarrow \infty$. Dieser Umstand dürfte u. a. eine zwanglose Erklärung der Dunkelheit des Himmels gewölbes bieten, ohne dass man einer zusätzlichen hypothetischen Extinktion des Lichtes im Weltraum benötigte: sollte sogar die ganze Innenfläche $4\pi q^2$ einer Sphäre vom Radius q bestän-

dig mit gleicher Intensität J leuchten, so würde bei $\varrho \rightarrow \tau c$ dennoch die Gesamtintensität des empfangenen Lichtes unbegrenzt abnehmen. In einem Raumwinkelement $d\psi$ wird nämlich der im Mittelpunkt der Sphäre gedachte fixierte Beobachter die scheinbare Helligkeit

$$J \cdot \frac{\varrho^2}{l^2} d\psi = J \cdot \left(1 - \frac{u}{c}\right)^2 d\psi$$

konstatieren; bei $\varrho \rightarrow \tau c$ nähert sich dies offenbar dem Wert 0. Eine noch so hell leuchtende Innenfläche vom Radius τc erzeugt im Mittelpunkt überhaupt keine Lichteindrücke.

Für Objekte auf der Sichtsphäre wird die Expansionsgeschwindigkeit $u = \sigma \tau c = c$. Dieser Grenzwert wird aber im Spektroskop schon deshalb nicht zu beobachten sein, weil die Helligkeit dann 0 ist. Wir wollen in diesem Zusammenhang gleich die korrigierte Formel für den Doppler-Effekt angeben, obgleich wir damit etwas vorgeifen, weil an einer Stelle der Ableitung ein Resultat aus § 10 benutzt wird.

Ist L die Laufzeit, so wird ein im Moment t emittiertes Fernsignal im Moment $t + L = T$ empfangen. Die Derivierte

$$\frac{dT}{dt} = 1 + \frac{dL}{dt}$$

wird die „Zeitvergrößerung“ darstellen: eine nach Ansicht des empfangenden Beobachters dt sec andauernde Zeitspanne am Sender wird sich im Empfänger während der Zeitspanne dT sec abwickeln. Gehört hierbei das sendende Objekt zum Inertialsystem des Beobachters, so wird dt auch nach Ansicht dieses Objekts das Emissionsintervall bedeuten; besitzt aber das Objekt eine Eigengeschwindigkeit v , so ist das Zeitmass des Objekts von dem des Inertialsystems verschieden, u. zw. wird, wie im § 10 Formel (87) angegeben, wenn t' die Zeit im „bewegten“ Objekt bedeutet,

$$dt = dt' \cdot \text{ch } \omega, \quad v = c \text{ th } \omega,$$

für $v=0$ also $dt = dt'$. Die Zeitvergrößerung beim Empfang im Vergleich zum Emissionsintervall, letzteres gemessen im Zeitmass des Objekts, wird:

$$\frac{dT}{dt'} = \frac{dT}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \left(1 + \frac{dL}{dt}\right) \text{ch } \omega. \quad (68)$$

Ganz abgesehen von anderen Erscheinungen, wird sich nun diese Zeitvergrößerung $\frac{dT}{dt'}$ auch in einem Unterschied zwischen der nach Ansicht des Objekts ausgesandten Frequenz ν' und der nach Ansicht des fixierten Beobachters empfangenen Frequenz ν äussern. Eine einfache Überlegung zeigt, dass

$$\frac{dT}{dt'} = \frac{\nu'}{\nu} \quad (69)$$

sein muss. Aus (65) findet man durch Differentiation nach t :

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{c-u} \cdot \frac{dQ}{dt}.$$

Führt man die euklidischen Koordinaten s_μ des Objekts ein und versteht unter a_μ die Richtungskosinus der Distanz Q , so wird $Qa_\mu = s_\mu$ und $Q^2 = s_\mu s_\mu$. Durch Differentiation nach t folgt hiernach mit Hilfe von (50):

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{s_\mu \dot{s}_\mu}{Q} \\ &= a_\mu \dot{s}_\mu \\ &= a_\mu (v_\mu + \sigma s_\mu) \\ &= a_\mu v_\mu + \sigma Q \\ &= a_\mu v_\mu + u. \end{aligned}$$

Fasst man alles dies zusammen, so folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \left(1 + \frac{dL}{dt}\right) \operatorname{ch} \omega \\ &= \left[1 + \frac{1}{c-u} (a_\mu v_\mu + u)\right] \cdot \operatorname{ch} \omega \\ &= \frac{a_\mu v_\mu + c}{c-u} \operatorname{ch} \omega. \end{aligned}$$

Bedeutet Θ den Winkel zwischen v und Q , so wird

$$a_\mu v_\mu = v \cos \Theta,$$

mithin ist

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \frac{c + v \cos \Theta}{c-u} \operatorname{ch} \omega \\ &= \frac{\operatorname{ch} \omega + \operatorname{sh} \omega \cos \Theta}{1 - \frac{u}{c}}, \end{aligned}$$

oder, in anderer Gestalt:

$$\nu' = \nu \cdot \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \Theta}{\left(1 - \frac{u}{c}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (70)$$

Diese Formel geht für $\sigma = 0$, also $u = 0$, in die Einstein'sche Form des Dopplerprinzips über⁸⁾. Für $v = 0$ ergibt sich aus (70) für die dann allein übrigbleibende Expansionsgeschwindigkeit u die klassische Form des Dopplerprinzips.

Beschränkt man sich auf Glieder erster Ordnung und führt statt der Frequenzen die „Wellenlängen“ λ und λ' ein, so erhält man aus (70) die Näherungsformel:

$$\lambda - \lambda' = \Delta\lambda \approx \frac{\lambda' (u + v \cos \Theta)}{c} = \frac{\lambda' \dot{\varrho}}{c},$$

d. h.

$$\frac{d\varrho}{dt} \approx \frac{c}{\lambda'} \cdot \Delta\lambda. \quad (71)$$

Die Vernachlässigung des Faktors $ch\omega$ dürfte praktisch von geringer Bedeutung sein, weil gewichtige Gründe dafür sprechen, dass v im allgemeinen klein ist. Wohl aber wird der Fehler der Näherungsformel gross, sobald u gross ist. Desgleichen würde ein merklicher Fehler entstehen, wenn man nach der Einstein'schen Formel rechnete und dabei $ch\omega$ aus $\frac{d\varrho}{dt}$ statt aus v bestimmte. Ein Beispiel soll dies erläutern:

Für $\varrho = 18,75 \cdot 10^{25}$ cm wird $u = 3 \cdot 10^9$ cm sec⁻¹; es sei noch $v = 3 \cdot 10^8$ cm sec⁻¹, $\Theta = 0$. Für die Spektrallinie C ($\lambda' = 6562,8$ Å.E.) findet man dann nach der exakten Formel (70) $\lambda = 7365,3$, also eine Rotverschiebung um 802,5 Å.E. Dabei ist $\dot{\varrho} = 33\,000$ km sec⁻¹. Nehmen wir nun an, eine Beobachtung ergebe für die C-Linie $\Delta\lambda = 802,5$, so würde man nach der Näherungsformel (71) berechnen:

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{6562,8 \cdot 10^{-8}} \cdot 802,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm sec}^{-1} = 36700 \text{ km sec}^{-1},$$

also unter den gegebenen Bedingungen einen um 11% zu hohen Wert finden. Die genaue klassische Formel würde auf Grund der genannten Beobachtung ergeben:

⁸⁾ Im Enzyklopädieartikel W. Pauli jr. V 19, Formel (15) steht α für $\pi - \Theta$ und β für $\frac{v}{c}$ unserer Bezeichnung.

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{c}{\lambda} \Delta\lambda = \frac{3 \cdot 10^{10}}{7365,3 \cdot 10^{-8}} 802,5 \cdot 10^{-8} \text{ cm sec}^{-1} = 32700 \text{ km sec}^{-1},$$

also bloss um 0,9% zu wenig. Die Einstein'sche Formel würde ergeben, wenn man annimmt, dass die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit gegenüber der Radialkomponente vernachlässigt werden kann, wie es ja in unserem Beispiel streng der Fall ist,

$$\begin{aligned} \frac{d\varrho}{dt} &= c \frac{\lambda + \lambda'}{\lambda^2 + \lambda'^2} \Delta\lambda = 3 \cdot 10^{10} \frac{13928}{97318 \cdot 10^3} 802,5 \text{ cm sec}^{-1} = \\ &= 34460 \text{ km sec}^{-1}, \end{aligned}$$

also um 4,5% zu viel.

Bildlich gesprochen, dominiert in der exakten Formel (70) die klassische Komponente gegenüber der relativistischen.

Sind ϱ und σ mit hinreichender Schärfe bekannt, so lässt sich nach (70) aus der Verschiebung der Spektrallinien die Radialkomponente der Eigengeschwindigkeit bei kleinen v , also $\text{ch } \omega = 1$, berechnen.

Nähert sich das Objekt der Sichtsphäre, strebt also u gegen c , so wächst die Zeitvergrösserung unbegrenzt. Ereignisse auf nahe der Sichtsphäre befindlichen Himmelskörpern werden vom fixierten Beobachter also gewissermassen unter der Zeitlupe gesehen.

Der Ort, wo das Objekt sich befand, als es das vom Beobachter im Moment T empfangene Signal aussandte, bildet den „sichtbaren Ort“ dieses Objekts im Zeitpunkt T , wobei allerdings noch die durch die Eigengeschwindigkeit bedingte Aberration zu berücksichtigen wäre; die Entfernung ϱ im Moment der Emission bildet entsprechend die „sichtbare Distanz“ für die Epoche T . Die sichtbaren Orte sämtlicher in Translation begriffener Objekte werden sich mit wachsendem T gegen die Sichtsphäre häufen, denn letztere enthält sämtlich Grenzlagen der sichtbaren Orte für $T \rightarrow \infty$. Beachtet man, dass die Zeit sich auch negativ ins Unendliche erstreckt und dass an der Sichtsphäre lokalisierte Objekte einen von Null verschiedenen scheinbaren Durchmesser haben, weil der Radius dieser Sichtsphäre endlich ist, so wird es sehr wahrscheinlich, dass die Sichtsphäre zu jeder Zeit von Objekten völlig überdeckt ist, auch dann, wenn die Anzahl der Objekte überhaupt bloss endlich ist. Der fixierte Beob-

achter wäre demnach jederzeit durch Objekte, deren sichtbarer Ort nahe der Sichtsphäre liegt, vom übrigen Weltraum gewissermassen ab geschirmt.

§ 9. **Weltlinien der translatorischen Bewegung.** Jeder Bahn im E_3 entspricht eine „Weltlinie“ im L_4 . Es sollen nun die Weltlinien für den Fall translatorischer Bewegung bestimmt werden.

Berechnet man für eine Translation (59) mit Hilfe von (49) die reduzierte Bahn, so folgt:

$$\bar{s}_\nu - (S_\nu + \tau v_\nu) = -\tau v_\nu e^{-\sigma t}; \quad (72)$$

mithin ist der Quotient

$$\frac{\bar{s}_\nu - (S_\nu + \tau v_\nu)}{v_\nu}$$

unabhängig vom Index ν . Dies zeigt, dass die reduzierte Bahn im E_3 geradlinig, u. zw. parallel dem euklidischen Vektor v ist. Nun ist aber vom L_4 aus beurteilt diese reduzierte Bahn ein Grenzkreis, u. zw. der Ort der Projektionen des tatsächlichen Ortes des bewegten Massenpunktes aus M auf (39); der tatsächliche Ort im L_4 liegt dann jedenfalls in der Ebene dieses Grenzkreises. Damit ist erwiesen, dass im Falle einer Translation die Weltlinie jedenfalls eine ebene Kurve darstellt.

Die laufenden Koordinaten x_ν , x_4 eines Punktes (x) dieser Weltlinie werden erhalten, wenn man in der Parameterdarstellung (40) \bar{s}_ν für s_ν und $-\sigma t$ für λ einsetzt, d. h. es wird für die gesuchte Weltlinie:

$$x_\nu = \frac{2 c^2 \bar{s}_\nu}{c^2 (1 + e^{-2\sigma t}) + \bar{s}_\nu \bar{s}_\nu}, \quad (73)$$

$$c - x_4 = \frac{2 c^3}{c^2 (1 + e^{-2\sigma t}) + \bar{s}_\nu \bar{s}_\nu}.$$

Führt man hier \bar{s}_ν aus (72) ein, so erhält man die Koordinaten x_ν , x_4 der Weltlinie als Funktionen des Parameters t .

Aus (73) folgt durch Division:

$$\text{also:} \quad \frac{c x_\nu}{c - x_4} = \bar{s}_\nu, \quad (74)$$

$$\bar{s}_\nu \bar{s}_\nu = \frac{c x_\nu x_\nu}{(c - x_4)^2}. \quad (75)$$

Verwendet man noch die Richtungskosinus a_v des Vektors v , setzt also

$$v_v = v a_v, \quad (76)$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{c x_v a_v}{c - x_4} &= \bar{s}_v a_v = S_v a_v + \tau v a_v a_v (1 - e^{-\sigma t}) \\ &= S_v a_v + \tau v (1 - e^{-\sigma t}). \end{aligned}$$

Definiert man ferner eine Grösse λ mittels

$$S_v a_v = \tau v (e^\lambda - 1),$$

so folgt:

$$\frac{c x_v a_v}{c - x_4} = \tau v (e^\lambda - e^{-\sigma t}),$$

und wenn man diese Gleichung nach $e^{-\sigma t}$ auflöst und einen zwischen 0 und π gelegenen Winkel χ durch

$$-\tau v = c \tan \chi \quad (77)$$

eingührt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^\lambda (c - x_4) + x_v a_v \cot \chi}{c - x_4}.$$

Setzt man dies nebst (75) in (73) ein, so resultiert nach einigen Vereinfachungen für den Punkt (x) der Weltlinie:

$$F_{xx} - [e^\lambda (c - x_4) + x_v a_v \cot \chi]^2 = 0. \quad (78)$$

Die Weltlinie bildet einen ebenen u. zw. durch M gehenden Schnitt des Isogonalraumes (78), also jedenfalls eine Isogone der Zeitrichtungen. Der ideelle Mittelpunkt (p) des Isogonalraumes (78) hat die Koordinaten

$$p_v = -e^{-\lambda} c a_v \cot \chi, \quad p_4 = c.$$

Aus (74) und (72) folgert man:

$$\begin{aligned} \frac{c x_v}{c - x_4} &= \bar{s}_v = S_v + \tau v_v - \tau v a_v e^{-\sigma t} \\ &= C_v - \tau v a_v e^{-\sigma t}, \end{aligned}$$

worin C_v eine gewisse konstante Grösse hat. Es wird daher

$$\frac{c x_v - C_v (c - x_4)}{a_v (c - x_4)} = -\tau v e^{-\sigma t},$$

also

$$\frac{c x_1 - C_1 (c - x_4)}{a_1} = \frac{c x_2 - C_2 (c - x_4)}{a_2} = \frac{c x_3 - C_3 (c - x_4)}{a_3}.$$

Die hierdurch bestimmte Schnittebene enthält, wie man sich durch direktes Einsetzen der Koordinaten überzeugt, die Punkte M und (p) und liefert somit laut § 3 im Schnitt mit (78) eine Hauptisogone. Damit ist erkannt, dass die gesuchte Weltlinie eine Isogone der Zeitrichtungen von der nach (77) durch v bestimmten Neigung χ ist.

Lässt man die Ebene der Isogone in die 4 & 1-Ebene fallen, so ergibt sich als Gleichung der Kurve:

$$F_{xx} - [e^\lambda (c - x_4) + x_1 \cot \chi]^2 = 0. \quad (79)$$

Diese Kurve geht durch M und trifft die 4-Achse ausserdem noch in der Entfernung λc vom Ursprung. In der Fig. 2 ist

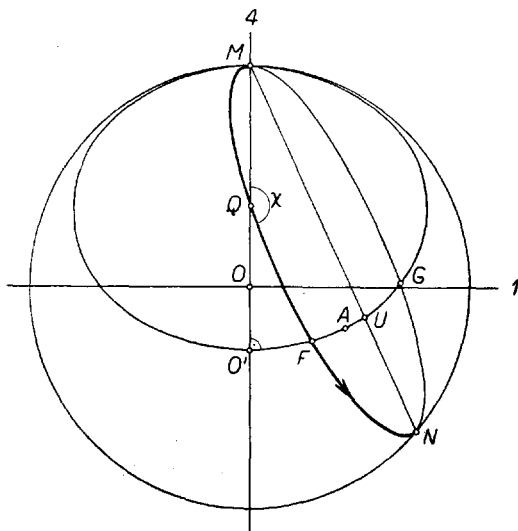


Fig. 2.

die 4 & 1-Ebene in der Klein'schen Interpretation⁹⁾ dargestellt; der Kreis interpretiert das absolute Gebilde, $MQFNG$ die Isogone (79), $MO'FAUG$ einen Schnitt des E_3 für ein bestimmtes t mit der 4 & 1-Ebene, also einen Grenzkreis. Die Isogone berührt das absolute Gebilde ausser in M noch im Punkte N , dessen Koordinaten lauten:

$$x_1 = \frac{-2 c e^\lambda \tan \chi}{e^{2\lambda} \tan^2 \chi + 1}, \quad x_4 = \frac{c(e^{2\lambda} \tan^2 \chi - 1)}{e^{2\lambda} \tan^2 \chi + 1}.$$

⁹⁾ Die Klein'sche Interpretation entsteht, wenn man die hyperbolischen Koordinaten x_1, x_4 als euklidisch-cartesische auffasst.

Sie schneidet den Grenzkreis in zwei Punkten F und G , welche durch die u. f. Punkte M und N getrennt sind, und berührt denselben Grenzkreis in M . Es wird N für $t = +\infty$, M für $t = -\infty$ erreicht. Den Gleichungen (73) entspricht nur der eine Bogen der mittels (79) dargestellten ganzen Isogone; in der Figur ist dieser eine Bogen durch dickere Linienführung gekennzeichnet. Der in der Zeitrichtung MN im L_4 „fallende“ Punkt U des fixierten Inertialsystems wird von der Isogone bei unbeschränkt wachsendem t gerade nicht mehr getroffen, wohl aber jeder näher zu F liegende Punkt A dieses Inertialsystems. Nach § 7 wird daher der Grenzkreisbogen FU die Länge τv haben, unabhängig von t . Von U aus beurteilt ist F der Fluchtpunkt und die Bewegung längs der Isogone eine singuläre.

Zur Berechnung des Bogenelements dJ der Isogone bedarf man nach (15) der Größen F_{xx} , $F_{x,dx}$ und $F_{dx,dx}$. Wir geben kurz die Resultate an. Es wird nach (73) und (78), unter Beachtung der übrigen Relationen:

$$\begin{aligned} F_{xx} &= \frac{c^2 \cos^4 \chi}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^2} \\ F_{x,dx} &= \frac{-\sigma c^2 \operatorname{sh} \sigma t \cos^4 \chi}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^3} dt \\ F_{dx,dx} &= \sigma^2 c^2 \cos^2 \chi \frac{(1 - \sin^2 \chi \operatorname{ch} \sigma t)^2 + \sin^2 \chi \cos^2 \chi \operatorname{sh}^2 \sigma t}{(\operatorname{ch} \sigma t - \sin^2 \chi)^4} dt^2, \end{aligned}$$

woraus sich bei passender Vorzeichenwahl ergibt:

$$dJ = -\frac{\sigma c}{\cos \chi} dt = \frac{-\gamma dt}{\cos \chi} = \frac{dq}{\cos \chi}, \quad (80)$$

wenn q die Bedeutung (45) hat. Zählt man die Bogenlänge J vom Moment $t = 0$ an, so wird folglich

$$J = \frac{-\gamma t}{\cos \chi} = \frac{q}{\cos \chi}. \quad (81)$$

Die Bogenlänge der beschriebenen Weltlinie ist also bei translatorischer Bewegung proportional der Zeit; der Proportionalitätsfaktor, also sozusagen die Geschwindigkeit, mit der die Isogone im L_4 beschrieben wird, ist $\frac{-\gamma}{\cos \chi}$. Im krummlinigen Dreieck QOF der Fig. 2 ist also

$$\frac{QO}{QF} = -\cos \chi = \cos(\pi - \chi).$$

Hierbei bedeutet die geradlinige Strecke QO' die mittels eines orthogonalen Grenzkreises erzeugte Projektion des Bogens QF auf die Zeitrichtung. Nennt man eine mittels orthogonaler Grenzkreise erzeugte Projektion eine Weierstrass'sche, so hat man den Satz:

Die Weierstrass'schen Projektionen der Bogenstücke einer Isogone auf eine beliebige Zeitrichtung sind proportional den Längen der Bogenstücke; der Proportionalitätsfaktor ist der Kosinus des Neigungswinkels.

Nach (80) und (77) wird

$$\left(\frac{dJ}{dt}\right)^2 = \frac{\sigma^2 c^2}{\cos^2 \chi} = \sigma^2 c^2 (1 + \tan^2 \chi) = v^2 + \gamma^2. \quad (82)$$

Assoziiert man auch der Geschwindigkeit $\frac{dJ}{dt}$ nach dem Prinzip (56) einen in der Tangente gerichteten hyperbolischen Vektor von der Länge H , setzt also

$$\frac{dJ}{dt} = c \operatorname{th} \frac{H}{c},$$

so gelten für die Projektionen H_4 und H_1 dieses Vektors H auf die Zeitrichtung und auf den Berührungsraum \mathbf{E}_3 des \mathbf{E}_3 die Beziehungen:

$$c \operatorname{th} \frac{H_4}{c} = -c \operatorname{th} \frac{H}{c} \cos \chi = \gamma,$$

$$c \operatorname{th} \frac{H_1}{c} = c \operatorname{th} \frac{H}{c} \cos \left(\chi - \frac{\pi}{2}\right) = -\sigma c \tan \chi = v.$$

Der Vektor H_4 würde demnach der Fallgeschwindigkeit γ des \mathbf{E}_3 , der Vektor H_1 der Eigengeschwindigkeit v des Massenkpunktes assoziiert sein. Dies gilt für jeden Punkt der Isogone, unabhängig von t . Es liegt nahe anzunehmen, dass nur die Komponente v eine Energiedifferenz im \mathbf{E}_3 bedeutet, die Expansionsgeschwindigkeit dagegen, die bloss einer Ortsdifferenz entspricht und nicht von Ort zu Ort übertragen werden kann, für den Energiebegriff im \mathbf{E}_3 ohne Belang ist. Auf eine nähere Behandlung des Energieproblems soll in dieser Abhandlung verzichtet werden.

Der Vektor H ist die hyperbolische Summe des Vektors H_1 und eines Vektors H'_4 (Fig. 3). Für H'_4 berechnet sich nach Formeln der hyperbolischen Geometrie:

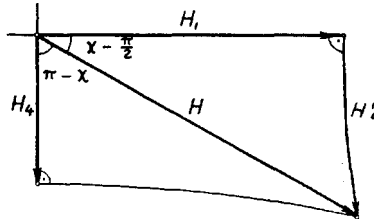


Fig. 3,

$$\begin{aligned}
 c \operatorname{th} \frac{H'_4}{c} &= c \operatorname{sh} \frac{H_1}{c} \tan \left(\chi - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= -c \operatorname{th} \frac{H_1}{c} \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \cot \chi \\
 &= -v \cot \chi \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \\
 &= \sigma c \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} \\
 &= \gamma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} .
 \end{aligned}$$

Bezeichnet man $c \operatorname{th} \frac{H'_4}{c}$ in Analogie mit $c \operatorname{th} \frac{H_4}{c}$ mittels γ' , so gilt also:

$$\gamma' = \gamma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} .$$

Bildet man aus γ' und c die Werte $\frac{\gamma'}{c} = \sigma'$, $\frac{c}{\gamma'} = \tau'$, so wird

$$\sigma' = \sigma \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} , \quad \tau = \tau' \operatorname{ch} \frac{H_1}{c} . \quad (83)$$

Auf eine Interpretation dieser Formeln (83) kommen wir im nächsten Paragraphen noch kurz zu sprechen.

§ 10. **Transformation auf ein anderes Inertialsystem.** Es werde nun neben dem fixierten noch ein zweites Inertialsystem betrachtet, dessen Eigengeschwindigkeit in bezug auf das erste die Komponenten v_x besitzt. Wir führen wieder mittels

$$v = c \operatorname{th} \omega , \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

den Parameter ω zur Kennzeichnung dieser Eigengeschwindigkeit ein. α_v seien die Richtungskosinus des Vektors v in bezug auf die euklidischen Achsen des ersten Systems. Zur Unterscheidung verwenden wir für die Bezeichnung der Koordinaten s_v eines Punktes und des Zeitmasses t im zweiten System die Strichelung: s'_v , t' . Die Anfangsepochen seien so gewählt, dass im Moment der Koinzidenz beider Ursprünge $t = t' = 0$ wird. Die Achsen des zweiten Systems mögen denen des ersten gegenüber nicht gedreht sein, was besagen will, dass die Bahnen der Ursprünge, jeweils vom anderen System beurteilt, dieselben Richtungskosinus, nur mit entgegengesetztem Vorzeichen besitzen sollen. Die Richtungskosinus der Bahn des zweiten Ursprungs sind hierbei, wie man aus (60) für $S_v = 0$ erkennt, genau die Richtungskosinus α_v des Vektors v .

Ein Punkt (s) des ersten Systems wird im Moment t seiner Zeitrechnung mit einem Punkt (s') des zweiten Systems und der Zeitangabe t' nach dessen Zeitrechnung koinzidieren. Gesucht sind die Übergangsformeln von (s), t zu (s'), t' . Diese Formeln müssen folgenden Forderungen genügen:

- 1) Es muss die Hypothese VIII von der Addition der Eigengeschwindigkeiten gelten.
- 2) Die Bahnen der Punkte des einen Systems müssen vom anderen aus beurteilt sich im L_4 sämtlich als Isogonen mit ein und derselben durch (77) bestimmten Neigung χ erweisen.
- 3) Die Konsequenzen müssen unabhängig sein von der Wahl des Ursprungs und der Nullepoche.

Geht vom Ursprung im fixierten System im Nullmoment ein Signal mit der Eigengeschwindigkeit w aus, und erreicht dieses Signal einen Beobachter (s) dieses Systems im Moment t , so wird der mit (s), t koinzidierende Beobachter (s'), t' des zweiten Systems offenbar ebenfalls die Ankunft des Signals konstatieren. Das Signal ist der getroffenen Übereinkunft gemäss auch im zweiten System aus dem Ursprung im Moment 0 ausgegangen, nur ist seine Eigengeschwindigkeit dort eine andere, denn es wird die Beziehung (54) gelten müssen.

Formt man mit Hilfe gewisser Proportionalitätsfaktoren p und p' die gebrochene Transformation (54) in die homogene Gestalt um, so folgt:

$$pw_\mu = p' w'_\mu + p' (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu w'_\nu + p' c a_\mu \operatorname{sh} \omega$$

$$p = p' \frac{1}{c} a_\nu w'_\nu \operatorname{sh} \omega + p' \operatorname{ch} \omega .$$

Bedeutet l die mittels (64) definierte Lichtzeit für die hier mit t bezeichnete Laufzeit des Signals, also

$$l = \tau c (e^{\sigma t} - 1) ,$$

so berechnet sich s_ν aus (62) als

$$s_\nu = \frac{w_\nu}{c} l ,$$

und ebenso wird für das zweite System:

$$s'_\nu = \frac{w'_\nu}{c} l' .$$

Führt man demnach $s_\nu c t^{-1}$ und $s'_\nu c l'^{-1}$ statt w_ν und w'_ν in die oben angegebenen homogenen Transformationsformeln ein, so folgt, wenn man noch κl und $\kappa' l'$ entsprechend statt p und p' schreibt:

$$\kappa s_\mu = \kappa' [s'_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu \operatorname{sh} \omega]$$

$$\kappa l = \kappa' [a_\nu s'_\nu \operatorname{sh} \omega + l' \operatorname{ch} \omega] .$$

Es wird sich später zeigen, dass die Forderungen 2) und 3) erfüllt sind, wenn $\kappa = \kappa' = 1$. Die gesuchte Transformation erhält dann die Gestalt:

$$s_\mu = s'_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu \operatorname{sh} \omega$$

$$l = a_\nu s'_\nu \operatorname{sh} \omega + l' \operatorname{ch} \omega . \quad (84)$$

Formal ist (84) mit der Lorentz-Transformation identisch: inhaltlich besteht ein wesentlicher Unterschied, da die Lichtzeit anders definiert ist als dort. Die Grösse τ bedeutet nach (51) eine Anzahl von sec des fixierten Beobachters. Da der sec-Etalon des „bewegten“ Beobachters mit demjenigen des fixierten nicht übereinstimmt, wird die Zeitspanne τ in sec des bewegten Beobachters eine andere Masszahl τ' ergeben. Nach Ansicht des fixierten Beobachters wird der bewegte bei der Bestimmung der Lichtzeit l' mit dieser unrichtigen Zahl τ' operieren, also

$$l' = \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1)$$

ansetzen.

Infolge

$$l = \tau c \left(\sigma t + \frac{\sigma^2 t^2}{2!} + \dots \right) = ct \left(1 + \frac{\sigma t}{2!} + \frac{\sigma^2 t^2}{3!} + \dots \right)$$

$$l' = \tau' c \left(\sigma' t' + \frac{\sigma'^2 t'^2}{2!} + \dots \right) = ct' \left(1 + \frac{\sigma' t'}{2!} + \frac{\sigma'^2 t'^2}{3!} + \dots \right)$$

wird in erster Annäherung die Definition der Lichtzeit für beide Systeme mit der Einstein-Minkowski'schen $l = ct$, $l' = ct'$ zusammenfallen. In derselben ersten Annäherung wird also auch (84) mit der Lorentz-Transformation inhaltlich identisch. Die Relativitätstheorie setzte eben $\sigma = \sigma' = 0$. Die empirische Erkenntnis, dass $\sigma > 0$, führt ebenso zwangsläufig zu einer Revision der kinematischen Grundprinzipien, wie die empirische Erkenntnis, dass die Lichtgeschwindigkeit nicht unendlich gross ist, früher oder später zur Relativitätstheorie führen musste.

Wie sich der Zusammenhang zwischen τ und τ' darstellen muss, wenn der Forderung 3) am Anfang dieses Paragraphen genügt werden soll, zeigen folgende Überlegungen:

Wir legen im Interesse der analytischen Einfachheit den Vektor v in die Richtung der 1-Achse, setzen also $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Die Gleichungen (84) werden dann:

$$\begin{aligned} s_1 &= s'_1 \operatorname{ch} \omega + \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{sh} \omega \\ s_2 &= s'_2 \\ s_3 &= s'_3 \\ \tau c (e^{\sigma t} - 1) &= s'_1 \operatorname{sh} \omega + \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{ch} \omega . \end{aligned} \quad (85)$$

Man fasse nun irgendeinen im gestrichenen System keine Eigengeschwindigkeit besitzenden Beobachter ins Auge. Für diesen wird nach (50)

$$\frac{ds'_v}{dt'} = \sigma' s'_v .$$

Die letzte Gleichung (85) ergibt durch Differentiation bei einem solchen Werte von $\frac{ds'_v}{dt'}$:

$$\begin{aligned} c e^{\sigma t} dt &= (\sigma' s'_1 \operatorname{sh} \omega + c e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega) dt' \\ &= \sigma' (s'_1 \operatorname{sh} \omega + \tau' c e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega) dt' \\ &= \sigma' [\tau c (e^{\sigma t} - 1) + \tau' c \operatorname{ch} \omega] dt' . \end{aligned}$$

Weil aber der Differentialquotient $\frac{dt}{dt'}$ nach 3) unabhängig sein muss von der Wahl der Nullepoche, also von dem Werte t , so ergibt sich hieraus zwangsläufig:

$$-\tau c + \tau' c \operatorname{ch} \omega = 0 ,$$

also:

$$\tau = \tau' \operatorname{ch} \omega , \quad (86)$$

und daher:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{\tau}{\tau'} = \operatorname{ch} \omega . \quad (87)$$

Die letzte Formel haben wir schon bei der Diskussion des Doppler-Effekts verwendet. dt' ist das Zeitintervall vom Standpunkt des bewegten Objekts, dt das entsprechende Zeitintervall vom Standpunkt der die Bewegung dieses Objekts nach ihren Koordinaten verfolgenden Beobachter aus dem sich in Ruhe dünkenden System. Operiert man mit koinzidierenden Nullepochen, so wird:

$$t = t' \operatorname{ch} \omega , \quad \sigma t = \frac{t' \operatorname{ch} \omega}{\tau' \operatorname{ch} \omega} = \sigma' t' .$$

Es wird daher auch für die Lichtzeiten l und l' die dem vorigen analoge Beziehung

$$l = l' \operatorname{ch} \omega$$

gelten. Hierin sind die gestrichenen Werte τ' , t' , l' stets demjenigen System zugeordnet, welches als das „bewegte“ gilt.

Die Schlussformel (83) des vorigen Paragraphen ist mit (86) inhaltlich identisch. Es bedeutet dies, vom fixierten System aus gesehen, dass der bewegte Beobachter statt mit der richtigen Fallgeschwindigkeit γ mit einer falschen, durch H_1 repräsentierten Fallgeschwindigkeit γ' operiert. Die Beschuldigung ist wechselseitig, d. h. die Lagen von H_1 und H_1 in der Figur 3 vertauschen sich, wenn man den zweiten Beobachter als feststehend, den ersten als bewegt betrachtet, und das Problem mit den Augen des zweiten ansieht. Transponiert man demnach die Attribute „feststehend“ und „bewegt“, so wird nicht mehr (86), sondern die entsprechend modifizierte Dilatation

$$\tau' = \tau \operatorname{ch} \omega$$

bestehen. Die Zeitdilatation resp. Lichtzeitdilatation ebenso wie die Längenkontraktion entsteht eben nur dadurch, dass man das eine System als „ruhend“, das andere als „bewegt“ an-

sieht, genauer gesagt dadurch, dass man die cm- und sec-Etalons des „bewegten“ mit den „richtigen“ cm- und sec-Etalons des „ruhenden“ Beobachters zu vergleichen trachtet. Die Zahl τ in (86) entsteht, wenn man die Zeitspanne τ des ruhenden Beobachters in scheinbar längeren Sekunden des bewegten Beobachters ausdrückt. In „eigenen“ Sekunden wird der Zahlenwert von τ für alle auf den Ruhezustand orientierten Beobachter laut der Hypothese III stets ein und derselbe sein, eine universelle Konstante, gedeutet als Zahl der dem System eigenen Sekunden, während welcher der Weltraum im L_4 um c dem System eigene cm in der dem System eigenen Zeitrichtung „fällt“.

Es sei beiläufig bemerkt, dass die Begriffe „Zeit“ und „Länge“ nach den Grundvorstellungen der hier entwickelten Theorie auch von der Gravitation mitbeeinflusst werden.

§ 11. **Scheinbare Deformation des Weltraumes.** Der Ort der Punkte, wo t' einen konstanten Wert hat, bildet den scheinbaren Weltraum des bewegten Beobachters vom Standpunkt des fixierten. Die Gleichung dieses scheinbaren Weltraumes im L_4 soll bestimmt werden.

Es sei zunächst bemerkt, dass die zu (84) inverse Transformation sich ergibt, wenn man die Richtungskosinus a_ν mit entgegengesetzten Vorzeichen nimmt:

$$\begin{aligned} s'_\mu &= s_\mu + (\text{ch } \omega - 1) a_\mu a_\nu s_\nu - l a_\mu \text{sh } \omega \\ l' &= -a_\nu s_\nu \text{sh } \omega + l \text{ch } \omega. \end{aligned} \quad (88)$$

Man kann dies durch direktes Nachrechnen verifizieren, oder auch aus (6) ablesen, da es sich bei (84) ja formal um eine hyperbolische Bewegung handelt.

Ist nun t' , also auch l' eine Konstante, so führen wir zunächst einen Parameter λ mittels $\lambda = -\sigma t_0$ ein, wo t_0 denjenigen Zeitpunkt im fixierten System bedeutet, in welchem dessen Ursprung mit einem Punkt des zweiten Systems in der Lichtzeitepoche l' nach der Zeitrechnung des letzteren koinzidiert. Aus der letzten Relation (88) folgt dann:

$$l' = \tau c (e^{-\lambda} - 1) \text{ch } \omega.$$

Um nun den scheinbaren Weltraum für diesen konstanten Wert von l' zu finden, hat man die in (40) auftretenden s_ν , s durch die unsrigen hier benutzten s_ν , $s = \sqrt{s_\nu s_\nu}$ entsprechenden reduzierten Werte $s_\nu e^{-\sigma t}$, $s e^{-\sigma t}$, und das dort auftretende λ

durch $-\sigma t$ zu ersetzen. Es wird demnach für die Koordinaten x_β dieses scheinbaren Weltraumes:

$$x_\nu = \frac{2c^2 s_\nu e^{-\sigma t}}{c^2(1 + e^{-2\sigma t}) + s^2 e^{-2\sigma t}} \quad (89)$$

$$c - x_4 = \frac{2c^3}{c^2(1 + e^{-2\sigma t}) + s^2 e^{-2\sigma t}}.$$

Hieraus folgt zunächst durch Division:

$$\frac{c x_\nu}{c - x_4} = s_\nu e^{-\sigma t}, \quad (90)$$

und hiernach:

$$s^2 e^{-2\sigma t} = s_\nu s_\nu e^{-2\sigma t} = \frac{c^2 x_\nu x_\nu}{(c - x_4)^2}. \quad (91)$$

Es bleibt nun noch $e^{-\sigma t}$ durch die x_β auszudrücken. Die letzte Relation (88) ergibt, wenn man den konstanten Wert von l' , wie oben angegeben, durch λ ausdrückt:

$$e^{-\sigma t} \tau c (e^{-\lambda} - 1) \operatorname{ch} \omega = -s_\nu e^{-\sigma t} a_\nu \operatorname{sh} \omega + \tau c (1 - e^{-\sigma t}) \operatorname{ch} \omega,$$

also:

$$e^{-\sigma t} \tau c (e^{-\lambda} - 1) \operatorname{ch} \omega = \frac{-c x_\nu a_\nu}{c - x_4} \operatorname{sh} \omega + \tau c (1 - e^{-\sigma t}) \operatorname{ch} \omega.$$

Löst man diese Gleichung nach $e^{-\sigma t}$ auf, so folgt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^\lambda (c - x_4 - x_\nu a_\nu \sigma \operatorname{th} \omega)}{c - x_4}.$$

Wird hier noch eine zwischen 0 und π gelegene Winkelgrösse ψ mittels

$$-\sigma \operatorname{th} \omega = -\frac{v}{\tau c} = \cot \psi \quad (92)$$

eingeführt, so resultiert aus (89) nach einigen Vereinfachungen:

$$F_{xx} - e^{2\lambda} (c - x_4 + x_\nu a_\nu \cot \psi)^2 = 0 \quad (93)$$

als die gesuchte Gleichung des scheinbaren Weltraumes.

Wie ein Vergleich mit (37) lehrt, ergibt dies bei veränderlichem λ , also veränderlichem l' , eine Schar konzentrischer Isogonalräume des Bündels M der Zeitrichtungen. Der Mittelpunkt (p) von (93) besitzt die Koordinaten:

$$p_\nu = -c a_\nu \cot \psi = \sigma v a_\nu = \sigma v_\nu,$$

$$p_4 = c.$$

Da laut § 3 das Gebilde (93) als uneigentliche dreidimensionale Sphäre mit dem ideellen Mittelpunkt (p) aufgefasst werden kann, so gilt demnach der Satz:

Nach Ansicht des ruhenden Beobachters benutzt der bewegte, statt der konzentrischen Grenzsphären, als sukzessive Welträume konzentrische uneigentliche Sphären mit ideellem Mittelpunkt. Die 3 ersten Koordinaten dieses Mittelpunktes sind die mit σ multiplizierten Komponenten der Eigengeschwindigkeit, die vierte Koordinate ist, wie beim ruhenden Beobachter, gleich c .

Es sei beiläufig bemerkt, dass die Geometrie auf dem Gebilde (93) nicht mehr euklidisch, sondern hyperbolisch ist¹⁰⁾. In der speziellen Relativitätstheorie, die ja der hier entwickelten in den Einzelheiten analog ist, bedeutet der Übergang zum „bewegten“ Weltraum bloss eine affine Transformation des euklidischen Raumes.

Wir schulden noch den Beweis, dass für die Transformation (84) die Forderung 2) des § 10 tatsächlich erfüllt ist.

Sind S'_ν die Koordinaten des zum bewegten Inertialsystem gehörigen Massenpunktes im Moment $t'=0$, so wird für eben diesen Massenpunkt beständig

$$s'_\nu = S'_\nu e^{\sigma' t'}$$

gelten müssen. Wir führen nun analog dem vorigen eine Hilfsgrösse λ mittels

$$\alpha_\nu S'_\nu = \frac{\tau c (e^\lambda - 1) \operatorname{sh} \omega}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega} = \frac{\tau v (e^\lambda - 1)}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch} \omega} \quad (94)$$

ein. Die letzte Gleichung (84) ergibt unter Berücksichtigung von (86):

$$\begin{aligned} \tau c e^{\sigma t} &= S'_\nu \alpha_\nu e^{\sigma' t'} \operatorname{sh} \omega + \tau c e^{\sigma' t'} \\ &= (S'_\nu \alpha_\nu \operatorname{sh} \omega + \tau c) e^{\sigma' t'}. \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Vgl. etwa F. Klein, Vorles. üb. nicht-euklidische Geometrie, Neubearbeitung 1928, Kap. VII § 7.

Aus (94) folgt aber:

$$S'_\nu a_\nu \operatorname{sh} \omega + \tau c = \frac{\tau c}{(1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega} ;$$

mithin wird

$$\operatorname{ch}^2 \omega (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) = e^{\sigma' t'} \cdot e^{-\sigma t} . \quad (95)$$

Die hyperbolischen Koordinaten des beobachteten Massenpunktes müssen den Gleichungen (89), mithin auch (90) und (91) genügen. Aus (90) folgt:

$$\frac{c x_\nu a_\nu}{c - x_4} = s_\nu a_\nu e^{-\sigma t} . \quad (96)$$

Andererseits ist nach (84), wenn man in Betracht zieht, dass es sich um euklidische Richtungskosinus handelt:

$$\begin{aligned} s_\mu a_\mu &= s'_\mu a_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\mu a_\mu a_\nu s'_\nu + l' a_\mu a_\mu \operatorname{sh} \omega \\ &= s'_\mu a_\mu + (\operatorname{ch} \omega - 1) a_\nu s'_\nu + l' \operatorname{sh} \omega \\ &= s'_\nu a_\nu \operatorname{ch} \omega + l' \operatorname{sh} \omega \\ &= S'_\nu a_\nu e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega + l' \operatorname{sh} \omega . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} l' \operatorname{sh} \omega &= \tau' c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{sh} \omega \\ &= \tau c (e^{\sigma' t'} - 1) \operatorname{th} \omega \\ &= \tau v (e^{\sigma' t'} - 1) . \end{aligned}$$

Man hat daher aus (94), (95), (96):

$$\begin{aligned} \frac{c x_\nu a_\nu}{c - x_4} &= [S'_\nu a_\nu e^{\sigma' t'} \operatorname{ch} \omega + \tau v e^{\sigma' t'} - \tau v] e^{-\sigma t} \\ &= \frac{\tau v (e^\lambda - 1)}{1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega} (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \operatorname{ch}^2 \omega + (1 - e^\lambda \operatorname{th}^2 \omega) \tau v \operatorname{ch}^2 \omega - \tau v e^{-\sigma t} \\ &= \tau v e^\lambda - \tau v e^{-\sigma t} . \end{aligned}$$

Hieraus berechnet sich, wenn man mit Hilfe von (77) wieder die Grösse χ einführt:

$$e^{-\sigma t} = \frac{e^\lambda (c - x_4) + x_\nu a_\nu \cot \chi}{c - x_4},$$

und die (x) genügen nach (89) der Gleichung

$$F_{xx} - [e^\lambda (c - x_4) + x_\nu a_\nu \cot \chi]^2 = 0. \quad (97)$$

Der beobachtete Massenpunkt befindet sich also nach Ansicht des fixierten Beobachters jederzeit im Isogonalraum (97) von der Neigung χ . Bei einer Verlegung des Ursprungs bleibt χ ungeändert, ebenso bei einer Verlegung der Nullepoche.

Nun gilt aber für einen beliebigen Punkt (x) der Bahn des Massenpunktes im L_4 sicher (90), also:

$$\begin{aligned} \frac{c x_\mu}{c - x_4} &= s_\mu e^{-\sigma t} \\ &= [S'_\mu e^{\sigma' t'} + (\text{ch } \omega - 1) a_\mu a_\nu S'_\nu e^{\sigma' t'} + l' a_\mu \text{sh } \omega] e^{-\sigma t} \\ &= [S'_\mu + (\text{ch } \omega - 1) a_\mu a_\nu S'_\nu + \tau v a_\mu] e^{\sigma' t'} \cdot e^{-\sigma t} - \tau v a_\mu e^{-\sigma t} \\ &= C_\mu - \tau v a_\mu e^{-\sigma t}, \end{aligned}$$

worin C_μ von t unabhängig ist. Hieraus folgt wie im § 9, dass die Bahn eine Hauptisogone wird, also die Neigung χ hat. Damit ist die Gültigkeit der Forderung 2) des § 10 erwiesen.

Die in (93) eingehende Winkelgrösse ψ ist mit χ durch die Relation

$$\tan \psi \cdot \tan \chi = \tau^2 \quad (98)$$

verknüpft.

Es sei bemerkt, dass die Bestimmung des scheinbaren Weltraumes und der Weltlinien analytisch einfacher vor sich geht, wenn man dem Achsensystem eine spezielle Lage gibt. Es wäre dann aber noch besonders zu beweisen, dass die erhaltenen Ergebnisse von der gewählten Achsenlage unabhängig sind.

Zusammenfassung der wesentlichsten Resultate.

1. Die spezielle Relativitätstheorie ist in der dargestellten „expansionistischen“ Kinematik unter der Annahme, dass der Expansionskoeffizient σ gleich Null wird, als Sonderfall enthalten.

2. Bei $\sigma > 0$ hat man zwischen Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit zu unterscheiden.

3. Bei konstanter Eigengeschwindigkeit v berechnet sich die überbrückte Distanz D aus

$$D = \frac{v}{c} l ,$$

wenn l das Lichtzeitintervall für die Zeit t ,

$$l = \sigma^{-1} c (e^{\sigma t} - 1) ,$$

und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Die so definierte Lichtzeit ist eine den Expansionskoeffizienten σ berücksichtigende Verallgemeinerung der Einstein'schen.

4. Ein Inertialsystem ist zweckmässig definiert als System, in dem sämtliche dazu gehörigen Massenpunkte die Eigengeschwindigkeit 0, und sämtliche übrigen Massenpunkte eine Eigengeschwindigkeit, die kleiner ist als c , besitzen.

5. Die Lorentz-Transformation gilt allgemein, wenn man statt der Einstein'schen die verallgemeinerte Lichtzeit einführt.

6. Der Übergang zum bewegten Inertialsystem ist gleichbedeutend einer Transformation der geradlinigen Zeitrichtungen in ein Isogonenbündel dieser Zeitrichtungen; die Schar aufeinanderfolgender Welträume transformiert sich aus einer Schar konzentrischer Lobatschewski'scher Grenzsphären in eine Schar uneigentlicher konzentrischer Sphären mit ideellem Mittelpunkt.

7. Die scheinbare Helligkeit der Himmelskörper nimmt stärker ab, als mit dem Quadrat der Entfernung. Aus der Entfernung $\sigma^{-1} c$ emittiertes Licht würde eine unendlich lange Laufzeit besitzen und die Helligkeit Null ergeben: das Himmelsgewölbe muss daher im allgemeinen dunkel erscheinen.

8. Prinzipiell sind nur Objekte innerhalb der Sichtsphäre vom Radius $\sigma^{-1} c$ um den Beobachter herum beobachtbar. Es hat sich aber jedes Objekt einmal innerhalb dieser Sichtsphäre befunden und verbleibt theoretisch beständig sichtbar, weil die Laufzeit des Lichtes ins unendliche wächst, wenn die Entfernung sich dem Grenzwert $\sigma^{-1} c$ unbeschränkt nähert.

9. Die Verschiebung der Spektrallinien infolge der Bewegung des Objekts relativ zum Beobachter folgt der Formel (70), die für $\sigma = 0$ in die Einstein'sche übergeht, bei grossen Entfernungen aber, wegen der Kleinheit der Eigengeschwindigkeiten, mit der klassischen Formel eine bessere Übereinstimmung zeigt, als mit der relativistischen Einstein'schen.

Inhalt.

| | Seite. |
|--|--------|
| Einführung | 3 |
| § 1. Gruppe der hyperbolischen Bewegungen | 4 |
| § 2. Distanz, Bogenelement, Winkelgrösse, Orthogonalität | 8 |
| § 3. Isogonalräume von Parallelenbündeln (uneigentliche Sphären) | 13 |
| § 4. Die Lobatschewski'schen Grenzsphären | 19 |
| § 5. Eigengeschwindigkeit und Expansionsgeschwindigkeit im Weltraum | 25 |
| § 6. Addition von Eigengeschwindigkeiten | 33 |
| § 7. Translatorische Bewegung | 39 |
| § 8. Anwendung auf Fernsignale | 43 |
| § 9. Weltlinien der translatorischen Bewegung | 50 |
| § 10. Transformation auf ein anderes Inertialsystem | 55 |
| § 11. Scheinbare Deformation des Weltraumes | 60 |
| Zusammenfassung der wesentlichsten Resultate | 64 |

DONNÉES ANTHROPOLOGIQUES SUR LES NOUVEAUX-NÉS ESTONIENS

A. LÜÜS

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE TARTU
DIRECTEUR DE LA CLINIQUE DES MALADIES
INFANTILES À L'UNIVERSITÉ DE TARTU

TARTU 1936

I. Matériaux.

Peu de données concernant les nouveaux-nés estoniens ont été publiées jusqu'ici. En tout cas, les données existantes sont trop peu nombreuses. En outre, les auteurs ayant employé des méthodes différentes, leurs données ne peuvent être comparées entre elles.

Avec l'aimable autorisation de M. le professeur J. Miländer, chef de la Clinique Gynécologique de l'Université de Tartu, j'utilise pour mon travail les matériaux, c'est à dire les feuilles des malades pour 1932—1933, de la section de maternité de ladite clinique. Dans le courant de cette période, 1360 femmes y ont accouché (tabl. 1), dont 1257 Estoniennes, soit 92,4 %, et 103 de nationalités étrangères, soit 7,6 % du total. Parmi les étrangères se trouvaient: Russes — 66, Allemandes — 12, Juives — 11, Polonaises — 6, Lettoniennes — 5, Suédoises — 2, Bohémienne — 1. Ces nationalités sont établies d'après les indications données par les intéressées.

Seules les données concernant les Estoniennes sont examinées dans le présent ouvrage, tandis que celles qui intéressent les étrangères en sont exclues, le nombre de ces dernières étant trop peu élevé.

Parmi les 1257 accouchées estoniennes 1109 étaient mariées, soit 88,2 %, et 148 filles-mères, soit 11,8 % du total. Ces 1257 mères ont accouché d'un seul enfant dans 1228 cas, soit 97,7 %, et de jumeaux dans 29 cas, soit 2,3 % du total. Ces chiffres donnent ainsi un accouchement multiple pour 43,3 accouchements simples.

Des garçons ont été mis au monde par 628 mères, soit 50 %, des filles par 618 mères, soit 49,2 %, tandis que 11 mères, soit 0,8 %, ont accouché de jumeaux mixtes: garçon et fille.

1203 de ces mères, soit 95,7 %, ont accouché d'enfants dont le poids était de 2500 g ou plus, et 44 mères, ou 3,5 %, ont accouché d'enfants dont le poids était au-dessous de 2500 g.

Nous considérons ces enfants comme étant au-dessous du poids normal comme des enfants prématurés ou débiles, ainsi que c'est l'usage dans la pédiatrie en général. 10 mères, soit 0,8 %, ont accouché de jumeaux, dont l'un était normal, l'autre débile. Des enfants viables ont été mis au monde par 1214 mères, ou 96,6 %, 40 mères, soit 3,2 %, ayant accouché de morts-nés ou d'enfants décédés aussitôt après leur naissance. Trois mères, ou 0,2 %, ont accouché de jumeaux, dont un seul survécut.

Tableau 1.
Mères accouchées.

| | Nombre | % |
|--|--------|------|
| Estoniennes | 1257 | 92,4 |
| Autres nationalités | 103 | 7,6 |
| Mariées | 1109 | 88,2 |
| Filles-mères | 148 | 11,8 |
| Enfants nés uniques | 1228 | 97,7 |
| Jumeaux | 29 | 2,3 |
| Garçons | 628 | 50,0 |
| Filles | 618 | 49,2 |
| Garçon et fille (jum.) | 11 | 0,8 |
| A terme | 1203 | 95,7 |
| Prématurés | 44 | 3,5 |
| A terme et prématurés (jum.) | 10 | 0,8 |
| Enfants vivants | 1214 | 96,6 |
| Morts-nés | 40 | 3,2 |
| Vivants et morts (jum.) | 3 | 0,2 |

Vingt-neuf mères ayant accouché de jumeaux, le nombre des enfants est supérieur de 29 au chiffre des accouchées, donc 1286. C'est sur la base de ce chiffre que nous traitons le sujet du présent ouvrage.

Sur ces 1286 enfants (tabl. 2) il y avait 651 garçons, ou 50,6 %, et 635 filles, soit 49,4 % du total.

Nous obtenons ainsi dans le total des naissances pour 100 filles 102,5 garçons.

De tous ces enfants 1134, soit 88,2 %, étaient légitimes, tandis que 152, ou 11,8 %, étaient illégitimes.

1228 enfants, soit 95,5 %, sont nés uniques, et 58 jumeaux, soit 4,5 %. Sont nés à terme — 1225 enfants, ou 95,2 %, et avant terme ou débiles — 61, ou 4,8 %.

1243 enfants, ou 96,3 %, sont vivants, tandis que 43 enfants, ou 3,7 %, sont ou mort-nés, ou décédés bientôt après leur naissance.

Tableau 2.
Répartition des enfants par groupes.

| | Nombre | % |
|-------------------------------|--------|------|
| Garçons | 651 | 50,6 |
| Filles | 635 | 49,4 |
| Légitimes | 1134 | 88,2 |
| Illégitimes | 152 | 11,8 |
| Enfants nés uniques | 1228 | 95,5 |
| Jumeaux | 58 | 4,5 |
| Nés à terme | 1225 | 95,2 |
| Avant terme | 61 | 4,8 |
| Nés vivants | 1243 | 96,3 |
| Morts-nés | 43 | 3,7 |

II. Poids et taille.

Le poids et la taille de l'enfant sont les indices les plus importants de sa viabilité, tandis que les autres mesures, comme par exemple celles de la tête et du tronc, bien qu'intéressantes en soi, ne sont que d'une importance secondaire. C'est pourquoi nous examinerons ici d'une manière plus détaillée les deux premières mesures, poids et tailles, ne touchant les autres qu'accessoirement.

Les enfants sont généralement pesés et mesurés, immédiatement après leur naissance, par l'accoucheuse sage-femme en chef de la clinique. La pesée est effectuée à l'aide de la balance dite pèse-bébé et les mesures sont prises avec un ruban-centimètre ordinaire.

Notre étude porte sur 1286 enfants en tout, dont nous avons examiné d'une manière plus détaillée seulement 571 garçons et 580 filles, 135 enfants ayant dû être éliminés pour divers motifs.

Nous avons tenu compte seulement des enfants pesant 2500 g et plus, pour autant qu'ils sont restés en vie, c'est-à-dire qu'ils ont quitté la clinique vivants. Nous avons éliminé :

1) tous les enfants morts-nés, et ceux décédés pendant l'accouchement ou bientôt après leur naissance;

2) tous les débiles pesant moins de 2500 g à leur naissance, et

3) tous les jumeaux. Parmi ces derniers nous n'aurions pu retenir que 8 garçons et 8 filles, en tout 16 enfants, car la plus grande partie des jumeaux, c'est-à-dire 42 enfants, aurait dû quand même être éliminée de notre étude à cause de leur poids inférieur à la norme fixée. L'élimination des 16 jumeaux en question n'affectera que d'une manière peu importante les résultats de notre travail.

Le but de mon ouvrage consiste à déterminer le poids, la taille et les autres mesures des nouveaux-nés estoniens, ainsi qu'à rechercher s'il existe quelques facteurs extérieurs exerçant une influence quelconque sur ces mesures.

Poids.

Le tableau 3 indique que les garçons, enfants légitimes, pèsent 3634 g en moyenne, tandis que le poids des filles légitimes est de 3487 g, soit une différence de 147 g au détriment des dernières.

Tableau 3.
Poids des nouveaux-nés.

| | Nombre total | Poids total, g | Poids moyen, g | % |
|--|-----------------|-------------------|-------------------|--------------|
| 1. Garçons, légitimes | 510 | 1 853 295 | 3634 | 44,3 |
| 2. Garçons, illégitimes | 61 | 215 650 | 3535 | 5,3 |
| 3. (1+2) Garçons, total | 571 | 2 068 945 | 3623 | 49,6 |
| 4. Filles, légitimes | 514 | 1 792 170 | 3487 | 44,6 |
| 5. Filles, illégitimes | 66 | 218 460 | 3310 | 5,7 |
| 6. (4+5) Filles, total | 580 | 2 010 630 | 3467 | 50,4 |
| 7. (1+4) Enfants légitimes | 1024 | 3 645 465 | 3560 | 89,0 |
| 8. (2+5) Enfants illégitimes | 127 | 344 110 | 3418 | 11,0 |
| 9. (3+6) Enfants, total | 1151 | 4 079 575 | 3545 | 100,0 |

Les garçons légitimes pèsent 3634 g, les garçons illégitimes — 3535, les premiers pesant ainsi 99 g de plus que les derniers.

Le poids moyen des filles légitimes est de 3487 g, celui des filles illégitimes de 3310, les premières pesant donc 177 g de plus que les dernières.

Le poids moyen des garçons et filles légitimes est de 3560 g,

celui des garçons et filles illégitimes de 3418, les premiers étant ainsi de 142 g plus lourds que les derniers.

Les garçons illégitimes pèsent 3535 g, les filles illégitimes — 3310, les garçons pesant donc 225 g de plus que les filles.

Plus loin nous notons sur le même tableau que, le poids de tous les garçons étant de 3623 g et celui de toutes les filles de 3467 g, le poids des garçons dépasse de 156 g celui des filles.

Nous pouvons conclure des données ci-dessus, que les nouveaux-nés estoniens pèsent en moyenne :

les garçons 3623 g
 les filles. 3467 „
 la moyenne pour les deux sexes ensemble est de 3545 „

Si nous examinons la question de savoir si l'ordre des grossesses et des accouchements de la mère exerce une influence quelconque sur le poids des nouveaux-nés, nous y répondrons affirmativement, en nous basant sur les chiffres obtenus.

Le tableau 4 indique le poids moyen relativement élevé des garçons légitimes.

Tableau 4.
 Garçons légitimes d'après l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre d'enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|------------------|-------------------|-------------------|-------|
| I | 221 | 784 555 | 3 550 | 43,33 |
| II | 134 | 488 550 | 3 646 | 26,27 |
| III | 76 | 283 380 | 3 729 | 14,90 |
| IV | 31 | 114 130 | 3 682 | 6,08 |
| V | 24 | 93 440 | 3 893 | 4,71 |
| VI | 11 | 43 790 | 3 981 | 2,16 |
| VII | 6 | 21 120 | 3 520 | 1,17 |
| VIII | 1 | 3 590 | 3 590 | 0,20 |
| IX | 3 | 9 340 | 3 113 | 0,59 |
| X et plus | 3 | 11 400 | 3 800 | 0,59 |
| Total | 510 | 1 853 295 | 3 634 | 100,0 |

Le poids des premiers enfants est déjà assez considérable, de 3550 g, dépassant ainsi de 300 g le poids moyen européen fixé généralement à 3250 g.

On observe une augmentation de poids jusqu'au 6^{me} enfant (excepté le 4^{me} enfant), ce poids étant alors aussi plus élevé que la moyenne européenne correspondante. C'est seule-

ment au 9^{me} accouchement que le poids s'abaisse au-dessous du niveau européen, pour remonter assez haut lors du 10^{me} accouchement.

Le nombre des garçons illégitimes est assez insignifiant (tableau 5).

Tableau 5.

Garçons illégitimes selon l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre d'enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|------------------|-------------------|-------------------|-------|
| I | 46 | 162 610 | 3 535 | 75,42 |
| II | 10 | 36 110 | 3 611 | 16,39 |
| III | 3 | 10 350 | 3 450 | 4,91 |
| IV | 1 | 3 150 | 3 150 | 1,64 |
| VIII | 1 | 3 430 | 3 430 | 1,64 |
| Total | 61 | 215 650 | 3 535 | 100,0 |

Il n'y a plus rien de spécial à ajouter ici.

Tout ce qui a été dit au sujet du tabl. 4 s'applique également au tabl. 6.

Tableau 6.

Garçons légitimes et illégitimes selon l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre d'enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|------------------|-------------------|-------------------|--------|
| I | 267 | 947 165 | 3 547 | 46,76 |
| II | 144 | 524 660 | 3 643 | 25,22 |
| III | 79 | 293 730 | 3 718 | 13,84 |
| IV | 32 | 117 280 | 3 665 | 5,60 |
| V | 24 | 93 440 | 3 893 | 4,20 |
| VI | 11 | 43 790 | 3 981 | 1,92 |
| VII | 6 | 21 120 | 3 520 | 1,05 |
| VIII | 2 | 7 020 | 3 510 | 0,35 |
| IX | 3 | 9 340 | 3 113 | 0,53 |
| X et plus | 3 | 11 400 | 3 800 | 0,53 |
| Total | 571 | 2 068 945 | 3 623 | 100,00 |

Les tableaux 7, 8 et 9 montrent aussi que le poids des nouveaux-nés estoniens du sexe féminin est relativement élevé déjà lors des premiers enfants, dépassant le niveau européen de

Tableau 7.

Filles légitimes selon l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre des enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------|
| I | 205 | 692 160 | 3 376 | 39,88 |
| II | 165 | 584 060 | 3 540 | 32,10 |
| III | 76 | 270 440 | 3 558 | 14,79 |
| IV | 24 | 88 400 | 3 683 | 4,67 |
| V | 21 | 77 480 | 3 689 | 4,09 |
| VI | 7 | 24 610 | 3 516 | 1,36 |
| VII | 6 | 19 300 | 3 217 | 1,17 |
| VIII | 5 | 18 250 | 3 650 | 0,97 |
| IX | 3 | 10 830 | 3 610 | 0,58 |
| X et plus | 2 | 6 640 | 3 320 | 0,39 |
| Total | 514 | 1 792 170 | 3 487 | 100,00 |

126, 44 et 110 grammes. Il résulte également de ces tableaux que l'ordre des accouchements exerce une influence indubitable sur le poids des nouveaux-nés.

Tableau 8.

Filles illégitimes selon l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre des enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|--------------------|-------------------|-------------------|--------|
| I | 51 | 167 990 | 3 294 | 77,27 |
| II | 10 | 33 570 | 3 357 | 15,15 |
| III | 2 | 6 220 | 3 110 | 3,03 |
| IV | 3 | 10 680 | 3 560 | 4,55 |
| Total | 66 | 218 460 | 3 310 | 100,00 |

Si nous examinons de plus près les tableaux 4 à 9, nous constatons une augmentation de poids jusqu'au 3^{me} (tabl. 4) et jusqu'au 5^{me} enfant (tabl. 7), lorsqu'il s'agit d'enfants légitimes. Cette augmentation ne s'observe que jusqu'au second enfant chez les nouveaux-nés illégitimes. Cela ne veut pourtant pas dire que tous les enfants nés ultérieurement présentent un poids inférieur. Pas du tout! Ils peuvent même surpasser en poids les enfants nés antérieurement, comme nous pouvons l'observer en jetant un coup d'oeil sur les tableaux correspondants.

Tableau 9.

Filles légitimes et illégitimes selon l'ordre de leur naissance.

| Accouchement | Nombre des enfants | Poids total, en g | Poids moyen, en g | % |
|--------------|--------------------|-------------------|-------------------|-------|
| I | 256 | 860 150 | 3 360 | 44,14 |
| II | 175 | 617 630 | 3 529 | 30,17 |
| III | 78 | 276 660 | 3 547 | 13,45 |
| IV | 27 | 99 080 | 3 670 | 4,66 |
| V | 21 | 77 480 | 3 690 | 3,62 |
| VI | 7 | 24 610 | 3 516 | 1,21 |
| VII | 6 | 19 300 | 3 217 | 1,03 |
| VIII | 5 | 18 250 | 3 650 | 0,86 |
| IX | 3 | 10 830 | 3 610 | 0,52 |
| X et plus | 2 | 6 640 | 3 320 | 0,34 |
| Total | 580 | 2 010 630 | 3 467 | 100,0 |

Ces mêmes tableaux démontrent en outre que le système à un ou deux enfants prévaut chez nous, ces cas dépassant 70 % des chiffres donnés, tandis que ceux à accouchements plus nombreux ne représentent qu' un tiers du total des naissances.

Étudions maintenant d'une manière plus détaillée les rapports existant entre le poids des nouveaux-nés et l'ordre d'accouchement des mères. Les tableaux 10 et 11 nous en offrent une vue d'ensemble.

Nous classons le poids des nouveaux-nés comme suit:

2500—3000 — poids au-dessous de la moyenne.

3001—3500 — poids moyen.

3501—4000 — poids au-dessus de la moyenne.

4001—5000 — poids élevé.

5001— — poids surélevé.

Le tableau 10 prouve que, lors de tous les accouchements, toutes les mères accouchent le plus souvent de filles de poids moyen. Les premiers accouchements semblent pourtant indiquer une petite prépondérance. La quatrième grossesse et les suivantes semblent donner plutôt des enfants de poids au-dessus de la moyenne, tandis que les poids élevés proviennent surtout de la deuxième grossesse et des suivantes. En additionnant les poids au-dessus de la moyenne et les poids élevés, nous voyons qu'ils dominent lors du deuxième accouchement et des suivants, mais

Tableau 10.

Filles légitimes et illégitimes d'après leur poids et l'ordre d'accouchement des mères.

| Poids g | I grossesse | | II grossesse | | III grossesse | | IV grossesse | | V grossesse | | VI grossesse et plus | | Total | |
|-----------|-------------|--------|--------------|--------|---------------|--------|--------------|--------|-------------|--------|----------------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | 51 | 19,93 | 23 | 13,14 | 8 | 10,26 | 1 | 3,70 | 1 | 4,76 | 5 | 21,74 | 89 | 15,35 |
| 3001—3500 | 114 | 44,53 | 62 | 35,43 | 31 | 39,75 | 9 | 33,33 | 7 | 33,33 | 6 | 26,09 | 229 | 39,48 |
| 3501—4000 | 77 | 30,07 | 65 | 37,15 | 25 | 32,05 | 12 | 44,45 | 8 | 38,10 | 11 | 47,82 | 198 | 34,14 |
| 4001—4500 | 14 | 5,47 | 22 | 12,57 | 12 | 15,38 | 5 | 18,52 | 4 | 19,05 | 1 | 4,35 | 58 | 10,00 |
| 4501—5000 | — | — | 2 | 1,14 | 2 | 2,56 | — | — | 1 | 4,76 | — | — | 5 | 0,86 |
| 5001— | — | — | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| Total | 256 | 100,00 | 175 | 100,00 | 78 | 100,00 | 27 | 100,00 | 21 | 100,00 | 23 | 100,00 | 580 | 100,00 |
| % % | 44,14 | — | 30,17 | — | 13,45 | — | 4,66 | — | 3,62 | — | 3,96 | — | 100,00 | — |

Tableau 11.

Garçons légitimes et illégitimes d'après leur poids et l'ordre d'accouchement des mères.

| Poids g | I grossesse | | II grossesse | | III grossesse | | IV grossesse | | V grossesse | | VI grossesse et plus | | Total | |
|-----------|-------------|--------|--------------|--------|---------------|--------|--------------|--------|-------------|--------|----------------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | 26 | 9,74 | 13 | 9,03 | 4 | 5,06 | 1 | 3,12 | — | — | 4 | 16,00 | 48 | 8,41 |
| 3001—3500 | 96 | 35,95 | 39 | 27,08 | 22 | 27,85 | 11 | 34,38 | 5 | 20,83 | 4 | 16,00 | 177 | 30,99 |
| 3501—4000 | 104 | 38,95 | 67 | 46,53 | 37 | 46,83 | 15 | 46,88 | 8 | 33,32 | 10 | 40,00 | 241 | 42,21 |
| 4001—4500 | 34 | 12,74 | 23 | 15,97 | 11 | 13,92 | 4 | 12,50 | 10 | 41,67 | 6 | 24,00 | 88 | 15,41 |
| 4501—5000 | 6 | 2,25 | 2 | 1,39 | 5 | 6,34 | 1 | 3,12 | — | — | — | — | 14 | 2,45 |
| 5001— | 1 | 0,37 | — | — | — | — | — | — | 1 | 4,17 | 1 | 4,00 | 3 | 0,53 |
| Total | 267 | 100,00 | 144 | 100,00 | 79 | 100,00 | 32 | 100,00 | 24 | 100,00 | 25 | 100,00 | 571 | 100,00 |
| % % | 46,76 | — | 25,22 | — | 13,84 | — | 5,60 | — | 4,20 | — | 4,38 | — | 100,00 | — |

plus particulièrement lors du 4^{me} et 5^{me} accouchement, où les poids élevés et surélevés se trouvent au nombre de 60 %.

Nous n'avons qu'une fille au poids surélevé, et celle-ci provient d'une deuxième grossesse. Les mères accouchent le plus souvent de filles au poids moyen, la plupart des garçons provenant de tous les accouchements présentant un poids élevé; ceci s'applique plus particulièrement aux 2^{mes}, 3^{mes} et 4^{mes} accouchements (v. tabl. 11).

Ce sont les premières et les quatrièmes grossesses qui produisent pour la plupart des garçons de poids moyen. Les poids au-dessus de la moyenne et les poids élevés s'observent le plus souvent dans les 2^{me} à 6^{me} grossesses. Ces catégories atteignent le maximum de leur poids à la 5^{me} grossesse, soit — 74 %.

Trois garçons à poids surélevés sont nés, dont l'un provenait d'une première, le deuxième d'une 5^{me} et le troisième d'une 6^{me} grossesse. En comparant les deux tableaux (10 et 11), nous voyons que les enfants au poids au-dessous de la moyenne sont généralement produits par les premières, deuxième et sixième grossesses, ainsi que par les suivantes, les poids moyens dominant chez les filles et ceux au-dessus de la moyenne chez les garçons. Nous avons plus de 59% de garçons à poids au-dessus de la moyenne et à poids élevé, tandis que ce chiffre se réduit à 41% pour les filles, ce qui donne aux garçons une prédominance de 15%.

Parmi les poids surélevés nous avons aussi trois garçons et seulement une fille.

Il semble également que dès les premières grossesses les mères accouchent de garçons plus lourds (53,94%) que les filles (35,54%).

Le tableau 12 indique l'influence de l'âge des mères sur le poids des filles légitimes.

Il ressort de ce tableau que l'âge de la mère exerce une certaine influence sur le poids des nouveaux-nés. C'est ainsi que les jeunes mères au-dessous de 20 ans, de même que celles de 20—24 ans, donnent naissance le plus souvent à des enfants au poids au-dessous de la moyenne. Les enfants à poids moyen sont mis au monde surtout par les mères de 20—34 ans, bien que des femmes plus jeunes et plus âgées puissent également accoucher de pareils enfants, ce qui est d'ailleurs tout à fait naturel. Les mères de 40 ans et plus, de même que celles de

Tableau 12.
Filles légitimes d'après leur poids et l'âge des mères.

| Poids g | A g e d e l a m è r e | | | | | | | | | | | | Total | |
|-----------|-----------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|---------------|--------|--------|--------|
| | Au-dessous de 20 a. | | 20—24 | | 25—29 | | 30—34 | | 35—39 | | 40 a. et plus | | | |
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | 6 | 40,00 | 20 | 17,86 | 26 | 13,33 | 14 | 12,17 | 9 | 15,00 | 1 | 5,88 | 76 | 14,79 |
| 3001—3500 | 5 | 33,34 | 44 | 39,29 | 74 | 37,95 | 44 | 38,27 | 19 | 31,67 | 6 | 35,29 | 192 | 37,36 |
| 3501—4000 | 3 | 20,00 | 39 | 34,82 | 71 | 36,41 | 42 | 36,52 | 23 | 38,33 | 7 | 41,18 | 185 | 35,99 |
| 4001—4500 | 1 | 6,66 | 8 | 7,14 | 21 | 10,77 | 14 | 12,17 | 8 | 13,33 | 3 | 17,65 | 55 | 10,70 |
| 4501—5000 | — | — | 1 | 0,89 | 2 | 1,03 | 1 | 0,87 | 1 | 1,67 | — | — | 5 | 0,97 |
| 5001— | — | — | — | — | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| Total | 15 | 100,00 | 112 | 100,00 | 195 | 100,00 | 115 | 100,00 | 60 | 100,00 | 17 | 100,00 | 514 | 100,00 |
| % % | 2,92 | — | 21,79 | — | 37,94 | — | 22,37 | — | 11,67 | — | 3,31 | — | 100,00 | — |

Tableau 13.
Garçons légitimes d'après leur poids et l'âge des mères.

| Poids g | A g e d e l a m è r e | | | | | | | | | | | | Total | |
|-----------|-----------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|---------------|--------|--------|--------|
| | Au-dessous de 20 a. | | 20—24 | | 25—29 | | 30—34 | | 35—39 | | 40 a. et plus | | | |
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | — | — | 16 | 14,41 | 12 | 6,90 | 8 | 6,84 | 5 | 6,94 | 1 | 5,00 | 42 | 8,24 |
| 3001—3500 | 7 | 43,75 | 24 | 21,62 | 61 | 35,06 | 30 | 25,64 | 23 | 31,95 | 7 | 35,00 | 152 | 29,80 |
| 3501—4000 | 4 | 25,00 | 47 | 42,34 | 73 | 41,95 | 59 | 50,43 | 27 | 37,50 | 9 | 45,00 | 219 | 42,95 |
| 4001—4500 | 5 | 31,25 | 20 | 18,02 | 26 | 14,94 | 17 | 14,53 | 13 | 18,05 | 2 | 10,00 | 83 | 16,27 |
| 4501—5000 | — | — | 4 | 3,61 | 2 | 1,15 | 3 | 2,56 | 2 | 2,78 | 1 | 5,00 | 12 | 2,35 |
| 5001— | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 2,78 | — | — | 2 | 0,39 |
| Total | 16 | 100,00 | 111 | 100,00 | 174 | 100,00 | 117 | 100,00 | 72 | 100,00 | 20 | 100,00 | 510 | 100,00 |
| % % | 3,14 | — | 21,76 | — | 34,12 | — | 22,94 | — | 14,12 | — | 3,92 | — | 100,00 | — |

35—39 ans, accouchent d'enfants à poids au-dessus de la moyenne et élevés.

Le tableau 13 indique les rapports existant entre le poids des garçons légitimes et l'âge des mères.

Dans ce tableau nous remarquons que les jeunes mères au-dessous de 20 a. n'ont accouché d'aucun garçon au poids au-dessous de la moyenne, mais surtout d'enfants à poids moyen ou élevé, pour autant que le nombre restreint de ces mères ($7+5=12$) permet de conclure. Les nouveaux-nés à poids au-dessus de la moyenne appartiennent à des mères entre 30—34 et au-dessus de 40 ans. Il en résulte donc que des mères relativement jeunes peuvent également accoucher de garçons à poids au-dessus de la moyenne et à poids élevé.

Il ressort des tableaux 12 et 13 que les mères estoniennes accouchent le plus souvent entre 25—29 ans, ensuite de 30—34 et de 20—24 ans. C'est à ces périodes que revient le plus grand pourcentage de toutes les naissances, soit 80%, tandis que 20% restent pour les femmes au-dessous ou au-dessus des âges mentionnés. Nous observons aussi sur les mêmes tableaux que plus de 70% des nouveaux-nés présentent des poids moyens et au-dessus de la moyenne, 30% ont un poids au-dessous de la moyenne ou un poids élevé, tandis que seulement quelques enfants isolés ont un poids surélevé.

Nous allons maintenant étudier l'influence que peut avoir la profession ou le métier des parents sur le poids des nouveaux-nés. La profession de la mère étant généralement malaisée à définir, tandis qu'il est plus facile de fixer celle du père, nous divisons les enfants en trois grands groupes, suivant la profession du père.

Au premier groupe appartiennent toutes les personnes s'occupant d'agriculture, tant fermiers que garçons de fermes et autres personnes occupées aux travaux des champs.

Dans le second groupe sont classées les personnes s'occupant de travaux corporels, tels que les divers artisans, ouvriers, cheminots et manœuvres.

Nous rangeons dans le troisième groupe tous les travailleurs intellectuels, tels que professeurs, médecins, avocats, en outre les propriétaires d'immeubles, fonctionnaires etc.

Les tableaux 14 et 15 nous donnent les aperçus correspondants.

Tableau 14.

Filles légitimes d'après leur poids et le métier des pères.

| Poids g | Agriculteurs | | Métiers corporels | | Professions libérales | | Total | |
|-----------|--------------|--------|-------------------|--------|-----------------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | 14 | 12,73 | 37 | 17,21 | 25 | 13,23 | 76 | 14,79 |
| 3001—3500 | 37 | 33,64 | 91 | 42,32 | 64 | 33,86 | 192 | 37,36 |
| 3501—4000 | 49 | 44,55 | 72 | 33,49 | 64 | 33,86 | 185 | 35,99 |
| 4001—4500 | 10 | 9,08 | 12 | 5,58 | 33 | 17,46 | 55 | 10,70 |
| 4501—5000 | — | — | 3 | 1,40 | 2 | 1,06 | 5 | 0,97 |
| 5001— | — | — | — | — | 1 | 0,53 | 1 | 0,19 |
| Total | 110 | 100,00 | 215 | 100,00 | 189 | 100,00 | 514 | 100,00 |
| % % | 21,40 | — | 41,83 | — | 36,77 | — | 100,00 | — |

En examinant le tableau 14, nous remarquons que tous les groupes présentent un certain nombre de filles au poids au-dessous de la moyenne. Les travailleurs manuels, par contre, produisent plus d'enfants à poids moyen que les deux autres groupes. Les enfants à poids au-dessus de la moyenne sont représentés surtout chez les agriculteurs, tandis que les poids élevés s'observent pour la plupart chez les travailleurs intellectuels.

Si nous additionnons les enfants à poids au-dessus de la moyenne et à poids élevé (3501—5000 g), nous verrons que les agriculteurs y occupent la première place, les travailleurs intellectuels — la seconde, et les travailleurs manuels — la troisième, soit 53,63 %, 52,38 % et 40,47 %.

Ces différences étant cependant relativement petites, nous ne pouvons en tirer des conclusions de quelque portée.

Tout ce qui a été dit au sujet du tableau 14 peut être appliqué presque entièrement au tableau 15.

Ici aussi (tabl. 15), les divers groupes diffèrent si peu, qu'il est difficile d'en tirer des conclusions quelconques. En additionnant de nouveau les groupes des poids élevés et ceux des poids au-dessus de la moyenne, nous obtenons le même ordre résultant aussi du tableau 14, la première place appartenant aux agriculteurs, la seconde aux travailleurs intellectuels et la troisième aux travailleurs manuels, soit : 66,20 %, 60,99 % et 58,59 %. Ici la différence entre les deux derniers chiffres est insignifiante, tandis que la supériorité des agriculteurs y est plus marquée.

Tableau 15.

Garçons légitimes d'après leur poids et le métier des pères.

| Poids g | Agriculteurs | | Métiers manuels | | Professionslibérales | | Total | |
|-----------|--------------|--------|-----------------|--------|----------------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 2500—3000 | 9 | 6,34 | 19 | 10,22 | 14 | 7,69 | 42 | 8,24 |
| 3001—3500 | 39 | 27,46 | 57 | 30,65 | 56 | 30,77 | 152 | 29,80 |
| 3501—4000 | 66 | 46,48 | 77 | 41,39 | 76 | 41,76 | 219 | 42,95 |
| 4001—4500 | 26 | 18,31 | 29 | 15,59 | 28 | 15,33 | 83 | 16,27 |
| 4501—5000 | 2 | 1,41 | 3 | 1,61 | 7 | 3,85 | 12 | 2,35 |
| 5001— | — | — | 1 | 0,54 | 1 | 0,55 | 2 | 0,39 |
| Total | 142 | 100,00 | 186 | 100,00 | 182 | 100,00 | 510 | 100,00 |
| % % | 27,84 | — | 36,47 | — | 35,69 | — | 100,00 | — |

En général, nous ne sommes pas en mesure de prouver que le métier du père exerce une influence prononcée sur le poids des enfants. Ceci s'explique aussi partiellement par le nombre restreint (1024) des enfants faisant l'objet du présent travail, mais plus particulièrement par le fait que les divers domaines de travail de nos nationaux sont très peu divergents et souvent même liés entre eux, ce qui ne nous permet pas de différencier d'une manière plus marquée le résultat final de notre enquête. Outre cela, nos „travailleurs intellectuels“, non-obstant leur dénomination, s'occupent souvent de travaux corporels, ou du moins s'en sont occupés pendant une période antérieure de leur vie.

Taille.

Pour la mensuration de la taille des nouveaux-nés, notre enquête porte sur 566 garçons et 580 filles, soit 1146 enfants au total.

On a mesuré les enfants du sommet de la tête (sinciput) jusqu'au nombril et de là jusqu' à la plante des pieds, avec un ruban-centimètre ordinaire. Ces deux mesures ensemble indiquent la longueur totale de l'enfant.

La longueur des garçons (v. tabl. 16) est le plus souvent de 50 cm, soit dans 225 cas — ou 39,75 %. Nous observons 197 cas ou 34,78 % au-dessous de 50 cm, et 144 ou 25,44 % au-dessus de ce chiffre.

Nous pouvons considérer la longueur ordinaire des nouveaux-nés estoniens comme étant de 48—52 cm, peu d'enfants,

Tableau 16.
Longueur des garçons, en centimètres.

| I Longueur cm | II Nombre d'enfants | | III I × II |
|------------------|------------------------|--------|---------------|
| | abs. | % | |
| 44 | 1 | 0,18 | 44 |
| 44,5 | 1 | 0,18 | 44,5 |
| 45 | 3 | 0,53 | 135 |
| 46 | 8 | 1,41 | 368 |
| 47 | 25 | 4,42 | 1175 |
| 47,5 | 1 | 0,18 | 47,5 |
| 48 | 52 | 9,19 | 2496 |
| 48,5 | 2 | 0,35 | 97 |
| 49 | 101 | 17,84 | 4949 |
| 49,5 | 3 | 0,53 | 148,5 |
| 50 | 225 | 39,75 | 11250 |
| 50,5 | 2 | 0,35 | 101 |
| 51 | 75 | 13,25 | 3825 |
| 52 | 42 | 7,42 | 2184 |
| 52,5 | 1 | 0,18 | 52,5 |
| 53 | 15 | 2,65 | 795 |
| 54 | 5 | 0,88 | 270 |
| 55 | 3 | 0,53 | 165 |
| 56 | — | — | — |
| 57 | 1 | 0,18 | 57 |
| Total | 566 | 100,00 | 28204 |

$$\text{Moyenne arithm.: } \frac{28204}{566} = 49,83.$$

bien moins de 10 %, ayant une longueur au-dessous ou au-dessus des chiffres mentionnés. La longueur des garçons variant de 44—57 cm, le degré de variation est de 13 cm.

Chez les filles aussi (tabl. 17) la longueur ordinaire la plus fréquente est de 50 cm, soit dans 215 cas, ou 37,08 %. Au-dessous de 50 cm nous marquons 281 cas ou 48,46 %, au-dessus de 50 cm — 84 cas ou 14,17 %.

La longueur ordinaire des filles est ainsi de 48—51 cm, au-dessous de ces chiffres 10 % et au-dessus seulement 3 %. Leur longueur variant de 42—58 cm, le degré de variation est ici de 16 cm.

La longueur des garçons en moyenne . . 49,83 cm.

La longueur des filles en moyenne . . . 49,27 „

La longueur moyenne des deux ensemble. 49,55 „

Tableau 17.
Longueur des filles, en centimètres.

| I Longueur cm | II Nombre d'enfants | | III I × II |
|------------------|------------------------|--------|---------------|
| | abs. | % | |
| 42 | 1 | 0,17 | 42 |
| 43 | 1 | 0,17 | 43 |
| 44 | 2 | 0,34 | 88 |
| 45 | 9 | 1,55 | 405 |
| 45,5 | 1 | 0,17 | 45,5 |
| 46 | 12 | 2,08 | 552 |
| 47 | 37 | 6,39 | 1739 |
| 47,5 | 1 | 0,17 | 47,5 |
| 48 | 88 | 15,17 | 4224 |
| 48,5 | 1 | 0,17 | 48,5 |
| 49 | 127 | 21,90 | 6223 |
| 49,5 | 1 | 0,17 | 49,5 |
| 50 | 215 | 37,08 | 10750 |
| 50,5 | 3 | 0,52 | 151,5 |
| 51 | 56 | 9,66 | 2856 |
| 51,5 | 1 | 0,17 | 51,5 |
| 52 | 18 | 3,10 | 936 |
| 53 | 2 | 0,34 | 106 |
| 54 | 2 | 0,34 | 108 |
| 55 | 1 | 0,17 | 55 |
| 56 et 57 | — | — | — |
| 58 | 1 | 0,17 | 58 |
| Total | 580 | 100,00 | 28579 |

$$\text{Moyenne arithm.: } \frac{28579}{580} = 49,27.$$

Si nous examinons les filles d'après leur longueur et l'ordre d'accouchement des mères (tabl. 18), nous constatons que le premier accouchement donne les plus grandes variations des longueurs, tant au-dessus qu'au-dessous de la moyenne. Lors des seconds et troisièmes accouchements cette variation diminue sensiblement, et, à partir du 4^{me} enfant, elle ne s'observe que très peu.

Comme il ressort de ce tableau, pour le total des accouchements, les mères accouchent pour la plupart de filles de 50 cm de longueur, atteignant le point culminant au 4^{me} accouchement (51,86 %), puis 49 cm, ensuite 48 cm lors des premiers et deuxièmes accouchements. A partir du 3^{me} accouchement et des suivants, c'est la longueur de 51 cm qui prédomine. En additionnant les nombres des filles dont la longueur va de 49 à 51

Tableau 18.

Filles légitimes et illégitimes d'après leur longueur et l'ordre d'accouchement des mères.

| Longueur cm | I grossesse | | II grossesse | | III grossesse | | IV grossesse | | V grossesse | | VI et plus | | Total | |
|-------------|-------------|--------|--------------|--------|---------------|--------|--------------|--------|-------------|--------|------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 42 | 1 | 0,39 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 43 | 1 | 0,39 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 44 | 2 | 0,78 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,34 |
| 45 | 3 | 1,17 | 4 | 2,29 | 1 | 1,28 | — | — | — | — | 1 | 4,35 | 9 | 1,55 |
| 45,5 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 4,76 | — | — | 1 | 0,17 |
| 46 | 6 | 2,34 | 3 | 1,71 | 2 | 2,56 | — | — | 1 | 4,76 | — | — | 12 | 2,08 |
| 47 | 21 | 8,20 | 7 | 4,00 | 5 | 6,41 | 1 | 3,70 | 2 | 9,53 | 1 | 4,35 | 37 | 6,39 |
| 47,5 | — | — | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 48 | 45 | 17,58 | 31 | 17,71 | 9 | 11,54 | 1 | 3,70 | 1 | 4,76 | 1 | 4,35 | 88 | 15,17 |
| 48,5 | 1 | 0,39 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 49 | 55 | 21,49 | 37 | 21,14 | 19 | 24,36 | 7 | 25,93 | 4 | 19,05 | 5 | 21,74 | 127 | 21,90 |
| 49,5 | — | — | — | — | 1 | 1,28 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 50 | 101 | 39,46 | 61 | 34,87 | 21 | 26,93 | 14 | 51,86 | 8 | 38,10 | 10 | 43,48 | 215 | 37,08 |
| 50,5 | 2 | 0,78 | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,52 |
| 51 | 13 | 5,03 | 20 | 11,43 | 15 | 19,23 | 4 | 41,81 | 2 | 9,52 | 2 | 8,69 | 56 | 9,66 |
| 51,5 | 1 | 0,39 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 52 | 2 | 0,78 | 7 | 4,00 | 4 | 5,13 | — | — | 2 | 9,52 | 3 | 13,04 | 18 | 3,10 |
| 53 | 1 | 0,39 | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,34 |
| 54 | 1 | 0,39 | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,34 |
| 55 | — | — | — | — | 1 | 1,28 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| 58 | — | — | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,17 |
| Total | 256 | 100,00 | 175 | 100,00 | 78 | 100,00 | 27 | 100,00 | 21 | 100,00 | 23 | 100,00 | 580 | 100,00 |
| % % | 44,14 | — | 30,17 | — | 13,45 | — | 4,66 | — | 3,62 | — | 3,96 | — | 100,00 | — |

Tableau 19.

Garçons légitimes et illégitimes d'après leur longueur et l'ordre d'accouchement des mères.

| Longueur cm | I grossesse | | II grossesse | | III grossesse | | IV grossesse | | V grossesse | | VI et plus | | Total | |
|-------------|-------------|--------|--------------|--------|---------------|--------|--------------|--------|-------------|--------|------------|--------|-------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 44 | — | — | — | — | 1 | 1,27 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,18 |
| 44,5 | — | — | — | — | 1 | 1,27 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,18 |
| 45 | 2 | 0,76 | 1 | 0,70 | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,53 |
| 46 | 4 | 1,52 | 2 | 1,40 | 1 | 1,27 | 1 | 3,13 | — | — | — | — | 8 | 1,41 |
| 47 | 17 | 6,46 | 2 | 1,40 | 3 | 3,79 | 1 | 3,13 | 2 | 8,33 | — | — | 25 | 4,42 |
| 47,5 | — | — | 1 | 0,70 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,18 |
| 48 | 27 | 10,27 | 14 | 9,79 | 5 | 6,33 | 2 | 6,25 | 2 | 8,33 | 2 | 8,00 | 52 | 9,19 |
| 48,5 | 2 | 0,76 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,35 |
| 49 | 44 | 16,73 | 30 | 20,98 | 14 | 17,72 | 8 | 25,00 | 2 | 8,33 | 3 | 12,00 | 101 | 17,84 |
| 49,5 | 2 | 0,76 | 1 | 0,70 | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,53 |
| 50 | 106 | 40,30 | 53 | 37,05 | 37 | 46,84 | 13 | 40,61 | 6 | 25,00 | 10 | 40,00 | 225 | 39,75 |
| 50,5 | — | — | 1 | 0,70 | — | — | — | — | — | — | 1 | 4,00 | 2 | 0,35 |
| 51 | 27 | 10,27 | 21 | 14,69 | 11 | 13,92 | 5 | 15,62 | 4 | 16,67 | 7 | 28,00 | 75 | 13,25 |
| 52 | 24 | 9,13 | 9 | 6,29 | 3 | 3,79 | 1 | 3,13 | 3 | 12,50 | 2 | 8,00 | 42 | 7,42 |
| 52,5 | 1 | 0,38 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,18 |
| 53 | 2 | 0,76 | 7 | 4,90 | 2 | 2,53 | 1 | 3,13 | 3 | 12,50 | — | — | 15 | 2,65 |
| 54 | 3 | 1,14 | — | — | — | — | — | — | 2 | 8,34 | — | — | 5 | 0,88 |
| 55 | 1 | 0,38 | 1 | 0,70 | 1 | 1,27 | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,53 |
| 56 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 57 | 1 | 0,38 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,18 |
| Total | 263 | 100,00 | 143 | 100,00 | 79 | 100,00 | 32 | 100,00 | 24 | 100,00 | 25 | 100,00 | 566 | 100,00 |
| % % | 46,46 | — | 25,26 | — | 13,95 | — | 5,65 | — | 4,24 | — | 4,41 | — | — | — |

cm, nous voyons que du 1^{er} au 4^{me} accouchement leur nombre augmente de plus en plus, c'est-à-dire que nous observons

| | |
|---------------------------------|----------|
| au 1 ^{er} accouchement | 66,81 % |
| au 2 ^{me} „ | 68,00 % |
| au 3 ^{me} „ | 71,80 % |
| au 4 ^{me} „ | 92,60 %. |

Ce qui a été dit au sujet des rapports existant entre la longueur des filles et l'ordre d'accouchement des mères, s'applique en général également aux garçons (v. tabl. 19). Ici aussi les longueurs varient le plus, soit au-dessus, soit au-dessous de la moyenne, lors des premiers, deuxièmes et troisièmes accouchements, devenant plus stables aux accouchements ultérieurs.

Pour le total des accouchements, la longueur des garçons nouveaux-nés est le plus souvent de 50 cm. Il semble que lors du premier accouchement les mères accouchent de garçons plus longs (59,70 %) que les filles (46,49 %), observation analogue à celle qui a été faite pour le poids des nouveaux-nés. Chez les garçons nous pouvons également constater la même augmentation progressive de la longueur, selon l'ordre des accouchements, que nous avons observée chez les filles, en additionnant les longueurs de 49—51 cm: 1^{er} accouchement — 68,06 %, 2^{me}— 74,12 %, 3^{me}— 78,48 %, et 4^{me}— 81,23 %.

Si nous calculons, d'après les tableaux 18 et 19, la longueur moyenne des garçons et des filles pour chaque accouchement séparément, nous obtenons une série de chiffres très intéressants.

Tableau 20.

Longueur moyenne des filles légitimes et illégitimes d'après l'ordre de l'accouchement.

| Accouchement | Nombre d'enfants | % | Longueur totale cm | Longueur moyenne cm |
|--------------|------------------|--------|--------------------|---------------------|
| I | 256 | 44,14 | 12 551 | 49,0 |
| II | 175 | 30,17 | 8 645 | 49,4 |
| III | 78 | 13,45 | 3 862,5 | 49,5 |
| IV | 27 | 4,66 | 1 342 | 49,7 |
| V | 21 | 3,62 | 1 035,5 | 49,3 |
| VI et plus | 23 | 3,90 | 1 143 | 49,7 |
| Total | 580 | 100,00 | 28 579 | 49,27 |

Il ressort du tableau 20 que la longueur des filles augmente progressivement jusqu'au 4^{me} enfant, pour diminuer au 5^{me} et augmenter de nouveau au 6^{me} et plus loin.

Tableau 21.

Longueur moyenne des garçons légitimes et illégitimes d'après l'ordre des accouchements.

| Accouchement | Nombre d'enfants | % | Longueur totale cm | Longueur moyenne cm |
|--------------|------------------|--------|--------------------|---------------------|
| I | 263 | 46,46 | 13 078,5 | 49,7 |
| II | 143 | 25,26 | 7 135,5 | 49,8 |
| III | 79 | 13,95 | 3 929,5 | 49,6 |
| IV | 32 | 5,65 | 1 591 | 49,7 |
| V | 24 | 4,24 | 1 215 | 50,6 |
| VI et plus | 25 | 4,41 | 1 254,5 | 50,2 |
| Total | 566 | 100,00 | 28 204 | 49,83 |

Dans ce tableau 21 qui concerne les garçons, nous ne pouvons pas constater une augmentation de longueur analogue. Cette augmentation ne s'observe qu'au 2^{me} accouchement, tandis que lors des accouchements ultérieurs la longueur montre des oscillations insignifiantes.

Les rapports existant entre la longueur des nouveaux-nés et l'âge des mères sont exposés dans les tableaux 22 et 23.

En ce qui concerne les rapports existant entre la longueur des filles et l'âge des mères, nous pouvons avancer que les mères âgées de moins de 20 ans accouchent plus fréquemment de filles de 49 et 48 cm de longueur, celles de 50 cm occupant la troisième place. Les mères de plus de 20 ans accouchent d'enfants plus longs. On constate ainsi les plus grandes longueurs chez les enfants mis au monde par des mères de 25—29 ans. Ces mères ont également le plus grand nombre d'enfants: 195 ou 37,94 %.

Les rapports entre la longueur des garçons et l'âge des mères sont exposés dans le tableau 23.

Il ressort de ce tableau que les mères au-dessous de 20 ans accouchent aussi le plus souvent de garçons de 50 cm. Des oscillations tant au-dessus qu'au-dessous de 50 cm sont aussi fréquentes chez des mères jeunes que chez des plus âgées.

Tableau 22.
Filles légitimes d'après leur longueur et l'âge des mères.

| Longueur cm | A g e d e l a m è r e | | | | | | | | | | | | Total | |
|-------------|-----------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|------------|--------|--------|--------|
| | Au-dessous de 20 a. | | 20—24 | | 25—29 | | 30—34 | | 35—39 | | 40 et plus | | | |
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 42 | — | — | — | — | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 43 | — | — | — | — | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 44 | — | — | — | — | 2 | 1,02 | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,39 |
| 45 | — | — | 3 | 2,68 | 1 | 0,51 | 2 | 1,74 | 1 | 1,67 | — | — | 7 | 1,36 |
| 45,5 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1,67 | — | — | 1 | 0,19 |
| 46 | — | — | 3 | 2,68 | 4 | 2,05 | 3 | 2,61 | 1 | 1,67 | — | — | 11 | 2,14 |
| 47 | — | — | 9 | 8,04 | 8 | 4,11 | 10 | 8,70 | 3 | 5,00 | 1 | 5,88 | 31 | 6,03 |
| 47,5 | — | — | — | — | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 48 | 4 | 26,67 | 21 | 18,75 | 27 | 13,85 | 17 | 14,78 | 7 | 11,66 | 3 | 17,65 | 79 | 15,38 |
| 48,5 | — | — | — | — | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 49 | 7 | 46,67 | 24 | 21,43 | 45 | 23,08 | 24 | 20,87 | 15 | 25,00 | 1 | 5,88 | 116 | 22,58 |
| 49,5 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,87 | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 50 | 3 | 20,00 | 42 | 37,50 | 70 | 35,90 | 40 | 34,78 | 21 | 35,00 | 6 | 35,29 | 182 | 35,42 |
| 50,5 | — | — | — | — | 3 | 1,54 | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,58 |
| 51 | 1 | 6,66 | 6 | 5,36 | 22 | 11,28 | 16 | 13,91 | 6 | 10,00 | 3 | 17,65 | 54 | 10,51 |
| 52 | — | — | 2 | 1,78 | 8 | 4,11 | 2 | 1,74 | 3 | 5,00 | 3 | 17,65 | 18 | 3,51 |
| 53 | — | — | 1 | 0,89 | 1 | 0,51 | — | — | — | — | — | — | 2 | 0,39 |
| 54 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1,67 | — | — | 1 | 0,19 |
| 55 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1,66 | — | — | 1 | 0,19 |
| 56 et | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 57 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 58 | — | — | 1 | 0,89 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| Total | 15 | 100,00 | 112 | 100,00 | 195 | 100,00 | 115 | 100,00 | 60 | 100,00 | 17 | 100,00 | 514 | 100,00 |
| % % | 2,92 | — | 21,79 | — | 37,94 | — | 22,37 | — | 11,67 | — | 3,31 | — | 100,00 | — |

Tableau 23.

Garçons légitimes d'après leur longueur et l'âge des mères.

| Longueur cm | A g e d e l a m è r e | | | | | | | | | | | | Total | |
|-------------|-----------------------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|-------|--------|------------|--------|-------|--------|
| | Au-dessous de 20 a. | | 20—24 | | 25—29 | | 30—34 | | 35—39 | | 40 et plus | | abs. | % |
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % | | |
| 44 | — | — | — | — | 1 | 0,57 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,20 |
| 44,5 | — | — | 1 | 0,93 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,20 |
| 45 | — | — | 3 | 2,77 | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 | 0,59 |
| 46 | — | — | 2 | 1,85 | 3 | 1,72 | 1 | 0,86 | 1 | 1,39 | 1 | 5,00 | 8 | 1,58 |
| 47 | 1 | 6,25 | 4 | 3,70 | 7 | 4,02 | 2 | 1,71 | 3 | 4,17 | 2 | 10,00 | 19 | 3,75 |
| 47,5 | — | — | 1 | 0,93 | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,20 |
| 48 | 2 | 12,50 | 11 | 10,18 | 13 | 7,48 | 8 | 6,84 | 7 | 9,72 | 1 | 5,00 | 42 | 8,28 |
| 48,5 | — | — | — | — | — | — | — | — | 2 | 2,78 | — | — | 2 | 0,39 |
| 49 | 1 | 6,25 | 22 | 20,37 | 37 | 21,27 | 18 | 15,38 | 14 | 19,44 | 2 | 10,00 | 94 | 18,54 |
| 49,5 | — | — | 1 | 0,93 | 1 | 0,57 | 1 | 0,86 | — | — | — | — | 3 | 0,59 |
| 50 | 6 | 37,50 | 39 | 36,11 | 71 | 40,81 | 45 | 38,45 | 29 | 40,28 | 9 | 45,00 | 199 | 39,26 |
| 50,5 | — | — | — | — | 1 | 0,57 | 1 | 0,86 | — | — | — | — | 2 | 0,39 |
| 51 | 2 | 12,50 | 12 | 11,11 | 21 | 12,07 | 24 | 20,51 | 10 | 13,89 | 3 | 15,00 | 72 | 14,20 |
| 52 | 3 | 18,75 | 8 | 7,41 | 12 | 6,90 | 9 | 7,69 | 5 | 6,94 | 2 | 10,00 | 39 | 7,69 |
| 52,5 | — | — | — | — | — | — | 1 | 0,86 | — | — | — | — | 1 | 0,20 |
| 53 | 1 | 6,25 | 3 | 2,78 | 6 | 3,45 | 4 | 3,42 | — | — | — | — | 14 | 2,76 |
| 54 | — | — | — | — | — | — | 3 | 2,56 | — | — | — | — | 3 | 0,59 |
| 55 | — | — | 1 | 0,93 | 1 | 0,57 | — | — | 1 | 1,39 | — | — | 3 | 0,59 |
| Total | 16 | 100,00 | 108 | 100,00 | 174 | 100,00 | 117 | 100,00 | 72 | 100,00 | 20 | 100,00 | 507 | 100,00 |

Les tableaux 24 et 25 sont destinés à exposer l'influence de la profession des pères sur la longueur des nouveaux-nés.

Tableau 24.

Filles légitimes d'après leur longueur et le métier des pères.

| Longueur cm | Agriculteurs | | Travailleurs manuels | | Travailleurs intellectuels | | Total | |
|-------------|--------------|--------|----------------------|--------|----------------------------|--------|--------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 42 | — | — | — | — | 1 | 0,53 | 1 | 0,19 |
| 43 | — | — | 1 | 0,47 | — | — | 1 | 0,19 |
| 44 | — | — | 1 | 0,47 | 1 | 0,53 | 2 | 0,39 |
| 45 | 1 | 0,91 | 1 | 0,47 | 5 | 2,65 | 7 | 1,36 |
| 45,5 | — | — | 1 | 0,47 | — | — | 1 | 0,19 |
| 46 | — | — | 7 | 3,25 | 4 | 2,12 | 11 | 2,14 |
| 47 | 8 | 7,27 | 14 | 6,51 | 9 | 4,76 | 31 | 6,03 |
| 47,5 | — | — | 1 | 0,47 | — | — | 1 | 0,19 |
| 48 | 16 | 14,55 | 38 | 17,67 | 25 | 13,23 | 79 | 15,38 |
| 48,5 | 1 | 0,91 | — | — | — | — | 1 | 0,19 |
| 49 | 25 | 22,73 | 49 | 22,79 | 42 | 22,22 | 116 | 22,58 |
| 49,5 | — | — | 1 | 0,47 | — | — | 1 | 0,19 |
| 50 | 46 | 41,81 | 72 | 33,47 | 64 | 33,85 | 182 | 35,42 |
| 50,5 | 1 | 0,91 | 2 | 0,93 | — | — | 3 | 0,58 |
| 51 | 9 | 8,18 | 21 | 9,76 | 24 | 12,70 | 54 | 10,51 |
| 52 | 3 | 2,73 | 5 | 2,33 | 10 | 5,29 | 18 | 3,51 |
| 53 | — | — | — | — | 2 | 1,06 | 2 | 0,39 |
| 54 | — | — | — | — | 1 | 0,53 | 1 | 0,19 |
| 55 | — | — | — | — | 1 | 0,53 | 1 | 0,19 |
| 56 et 57 | — | — | — | — | — | — | — | — |
| 58 | — | — | 1 | 0,47 | — | — | 1 | 0,19 |
| Total | 110 | 100,00 | 215 | 100,00 | 189 | 100,00 | 514 | 100,00 |
| % % | 21,40 | — | 41,83 | — | 36,77 | — | 100,00 | — |

Ce tableau semble indiquer que les pères agriculteurs engendrent plus souvent des filles d'une longueur de 50 cm que les autres travailleurs corporels ou intellectuels, tandis qu'on observe des longueurs de 49 cm également chez les nouveaux-nés de tous les trois groupes.

Ce sont toutefois les travailleurs intellectuels qui produisent le plus grand nombre d'enfants dont la longueur dépasse 50 cm.

On ne peut faire aucune observation particulière concernant les rapports existant entre la longueur des garçons (tabl. 25) et le métier des pères, car les longueurs de 48—52 cm sont également représentées dans les trois groupes, ne différant que de quelques % insignifiants.

Tableau 25.

Garçons légitimes d'après leur longueur et le métier des pères.

| Longueur cm | Agriculteurs | | Travailleurs manuels | | Travailleurs intellectuels | | Total | |
|-------------|--------------|--------|----------------------|--------|----------------------------|--------|-------|--------|
| | abs. | % | abs. | % | abs. | % | abs. | % |
| 44 | — | — | 1 | 0,55 | — | — | 1 | 0,20 |
| 44,5 | 1 | 0,70 | — | — | — | — | 1 | 0,20 |
| 45 | 1 | 0,70 | — | — | 2 | 1,10 | 3 | 0,59 |
| 46 | 1 | 0,70 | 3 | 1,63 | 4 | 2,20 | 8 | 1,58 |
| 47 | 4 | 2,82 | 9 | 4,91 | 6 | 3,30 | 19 | 3,75 |
| 47,5 | — | — | 1 | 0,55 | — | — | 1 | 0,20 |
| 48 | 10 | 7,04 | 15 | 8,20 | 17 | 9,34 | 42 | 8,28 |
| 48,5 | 2 | 1,41 | — | — | — | — | 2 | 0,39 |
| 49 | 23 | 16,20 | 38 | 20,77 | 33 | 18,13 | 94 | 18,54 |
| 49,5 | 2 | 1,41 | 1 | 0,55 | — | — | 3 | 0,59 |
| 50 | 61 | 42,97 | 71 | 38,80 | 67 | 36,81 | 199 | 39,26 |
| 50,5 | 1 | 0,70 | — | — | 1 | 0,55 | 2 | 0,39 |
| 51 | 21 | 14,79 | 26 | 14,21 | 25 | 13,74 | 72 | 14,20 |
| 52 | 10 | 7,04 | 14 | 7,65 | 15 | 8,24 | 39 | 7,69 |
| 52,5 | — | — | — | — | 1 | 0,55 | 1 | 0,20 |
| 53 | 5 | 3,52 | 3 | 1,63 | 6 | 3,30 | 14 | 2,76 |
| 54 | — | — | — | — | 3 | 1,64 | 3 | 0,59 |
| 55 | — | — | 1 | 0,55 | 2 | 1,10 | 3 | 0,59 |
| Total | 142 | 100,00 | 183 | 100,00 | 182 | 100,00 | 507 | 100,00 |

Tableau 26.

Rapports existant entre les poids et longueurs moyens des nouveaux-nés et l'ordre d'accouchement des mères.

| Accouchement | Poids des garçons g | Poids des filles g | Longueur des garçons cm | Longueur des filles cm |
|------------------|---------------------|--------------------|-------------------------|------------------------|
| I | 3547 | 3360 | 49,7 | 49,0 |
| II | 3643 | 3529 | 49,8 | 49,4 |
| III | 3718 | 3547 | 49,6 | 49,5 |
| IV | 3665 | 3670 | 49,7 | 49,7 |
| V | 3893 | 3690 | 50,6 | 49,3 |
| VI | 3981 | 3516 | 50,2 | 49,7 |
| Nombre d'enfants | 571 | 580 | 566 | 580 |

Nous pouvons affirmer qu'en général la longueur des nouveaux-nés est très variable, fait que nous devons attribuer à plusieurs causes.

Les essais que nous avons effectués dans le but de découvrir quelques règles concernant la longueur des nouveaux-nés n'ont

pas abouti à des données sûres. Nous n'avons pu observer que quelques tendances, au-dessus et au-dessous de la longueur moyenne, ce qui a été souligné pour chaque tableau séparément. Il semble par contre que des rapports mieux définis existent entre le poids et la longueur des nouveaux-nés d'un côté, et l'ordre d'accouchement de la mère, de l'autre côté, ce que nous avons également déjà signalé.

Dans le but d'obtenir un aperçu général plus clair, nous exposons ici ces chiffres séparément (tabl. 26).

III. Mesures de la tête.

Tableau 27.

Circonférence de la tête des garçons.

| I Circonférence de la tête cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|-------------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 26 | 1 | 0,18 | 26 |
| 30 | 2 | 0,35 | 60 |
| 31 | 2 | 0,35 | 62 |
| 32 | 17 | 2,98 | 544 |
| 32,5 | 1 | 0,18 | 32,5 |
| 33 | 40 | 7,02 | 1320 |
| 33,5 | 3 | 0,53 | 100,5 |
| 34 | 84 | 14,74 | 2856 |
| 34,5 | 7 | 1,23 | 241,5 |
| 35 | 125 | 21,92 | 4375 |
| 35,5 | 11 | 1,93 | 390,5 |
| 36 | 101 | 17,71 | 3636 |
| 36,5 | 3 | 0,53 | 109,5 |
| 37 | 91 | 15,95 | 3367 |
| 37,5 | 4 | 0,70 | 150 |
| 38 | 47 | 8,25 | 1786 |
| 39 | 19 | 3,33 | 741 |
| 40 | 9 | 1,58 | 360 |
| 41 | 1 | 0,18 | 41 |
| 42 | 1 | 0,18 | 42 |
| 45 | 1 | 0,18 | 45 |
| Total | 570 | 100,00 | 20285,5 |

$$\text{Moyenne arithm.: } \frac{20285,5}{570} = 35,59$$

Comme le tableau 27 le montre, la circonférence de la tête (planum occipito-frontale) des garçons est le plus souvent de

35 cm, dans 125 cas ou 21,92 %, puis 36, 37 et 34 cm. Moins de 10 % sont représentés par d'autres mesures.

Chez les filles (tableau 28), nous constatons plus fréquemment des circonférences de tête de 34, 35, 36, 33, et 37 cm, tandis que d'autres mesures sont bien plus rares.

La circonférence moyenne de la tête des garçons est de 35,59 cm, celle des filles de 34,88 cm, et la moyenne des deux ensemble est de 35,23.

Tableau 28.
Circonférence de la tête des filles.

| I Circonférence de la tête cm | II Nombre d'enfants | | I × II |
|-------------------------------------|------------------------|--------|---------|
| | abs. | % | |
| 31 | 6 | 1,03 | 186 |
| 31,5 | 1 | 0,17 | 31,5 |
| 32 | 26 | 4,48 | 832 |
| 32,5 | 6 | 1,03 | 195 |
| 33 | 69 | 11,90 | 2277 |
| 33,5 | 9 | 1,55 | 301,5 |
| 34 | 134 | 23,11 | 4556 |
| 34,5 | 7 | 1,21 | 241,5 |
| 35 | 111 | 19,13 | 3885 |
| 35,5 | 6 | 1,03 | 213 |
| 36 | 107 | 18,46 | 3852 |
| 36,5 | 3 | 0,52 | 109,5 |
| 37 | 61 | 10,52 | 2257 |
| 37,5 | 1 | 0,17 | 37,5 |
| 38 | 29 | 5,00 | 1102 |
| 39 | 3 | 0,52 | 117 |
| 39,5 | 1 | 0,17 | 39,5 |
| Total | 580 | 100,00 | 20233,0 |

$$\text{Moyenne arithm.: } \frac{20233}{580} = 34,88.$$

Le diamètre de la tête des garçons (diameter fronto-occipitalis), ainsi que le tableau 29 l'indique, est le plus souvent de 12 cm, puis de 11 et 13 cm, avec seulement quelques cas isolés au-dessus et au-dessous de ces chiffres.

Le diamètre fronto-occipital de la tête des filles (tableau 30) est aussi le plus souvent de 12, puis de 11 cm, tandis que les autres mesures sont représentées par moins de 10 %.

Tableau 29.
Diamètre fronto-occipital de la tête des garçons

| I Diamètre fronto-occip. cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|-----------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 9 | 4 | 0,71 | 36 |
| 9,5 | 1 | 0,18 | 9,5 |
| 10 | 20 | 3,52 | 200 |
| 10,5 | 14 | 2,47 | 147 |
| 11 | 146 | 25,70 | 1606 |
| 11,5 | 36 | 6,34 | 414 |
| 12 | 233 | 41,02 | 2796 |
| 12,5 | 25 | 4,40 | 312,5 |
| 13 | 70 | 12,32 | 910 |
| 13,5 | 2 | 0,35 | 27 |
| 14 | 13 | 2,28 | 182 |
| 15 | 4 | 0,71 | 60 |
| Total | 568 | 100,00 | 6700 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{6700}{568} = 11,79.$$

Tableau 30.
Diamètre fronto-occipital de la tête des filles.

| I Diamètre fronto-occip. cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|-----------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 9 | 1 | 0,17 | 9 |
| 10 | 38 | 6,55 | 380 |
| 10,5 | 15 | 2,59 | 157,5 |
| 11 | 199 | 34,32 | 2189 |
| 11,5 | 45 | 7,76 | 517,5 |
| 12 | 230 | 39,66 | 2760 |
| 12,5 | 14 | 2,41 | 175 |
| 13 | 30 | 5,17 | 390 |
| 14 | 5 | 0,86 | 70 |
| 15 | 2 | 0,34 | 30 |
| 18 | 1 | 0,17 | 18 |
| Total | 580 | 100,00 | 6696 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{6696}{580} = 11,54.$$

Diamètre fronto-occipital moyen de la tête des garçons — 11,79 cm

” ” ” ” ” ” filles — 11,54 ”

” ” ” des deux ensemble — 11,66 ”

Tableau 31.
Diamètre bipariétal de la tête des garçons.

| I Diamètre bipariétal cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|--------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 8 | 14 | 2,46 | 112 |
| 8,5 | 17 | 2,98 | 144,5 |
| 9 | 184 | 32,29 | 1656 |
| 9,5 | 56 | 9,82 | 532,0 |
| 10 | 261 | 45,80 | 2610 |
| 10,5 | 12 | 2,11 | 126 |
| 11 | 17 | 2,98 | 187 |
| 11,5 | 2 | 0,34 | 23 |
| 12 | 4 | 0,70 | 48 |
| 13 | 1 | 0,18 | 13 |
| 14 | 2 | 0,34 | 28 |
| Total | 570 | 100,00 | 5479,5 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{5479,5}{570} = 9,61.$$

Le diamètre bipariétal de la tête des garçons (diameter biparietalis), comme l'indique le tableau 31, est le plus souvent de 10, 9 et 9,5 cm, toutes les autres mesures étant représentées par moins de 10 %.

Le diamètre bipariétal de la tête des filles est le plus fréquemment de 10, 9 et 9,5 cm, d'autres mesures étant représentées au taux de 5 %.

Tableau 32.
Diamètre bipariétal de la tête des filles.

| I Diamètre bipariétal cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|--------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 7,5 | 1 | 0,17 | 7,5 |
| 8 | 20 | 3,45 | 160 |
| 8,5 | 34 | 5,86 | 289 |
| 9 | 209 | 36,04 | 1881 |
| 9,5 | 58 | 10,00 | 551 |
| 10 | 231 | 39,84 | 2310 |
| 10,5 | 9 | 1,55 | 94,5 |
| 11 | 13 | 2,24 | 143 |
| 12 | 4 | 0,68 | 48 |
| 12,5 | 1 | 0,17 | 12,5 |
| Total | 580 | 100,00 | 5496,5 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{5496,5}{580} = 9,48.$$

Le diamètre bipariétal moyen de la tête des garçons — 9,61 cm
 " " " " " " " " " filles — 9,48 "
 Les deux ensemble — 9,54 "

Pour la distribution des indices de la tête, nous nous basons sur la distribution des indices de la tête d'après le professeur R. Martin¹⁾ et nous divisons nos chiffres selon son système.

La distribution du professeur Martin est la suivante :

Dolichocéphales x—75,9
 Mésocéphales 76,0—80,9
 Brachycéphales 81,0—85,4
 Hyperbrachycéphales 85,5—x.

Tableau 33.

Indices de la tête des garçons.

| I | II | III | I | II | III |
|-------------|------------------|----------------|-------------|------------------|----------------|
| Indices | Nombre d'enfants | $I \times II$ | Indices | Nombre d'enfants | $I \times II$ |
| 57,1 | 1 | 57,1 | 80,2 | 18 | 1443,6 |
| 64,3 | 1 | 64,3 | 81,8 | 67 | 5480,6 |
| 65,4 | 1 | 65,4 | 82,6 | 4 | 330,4 |
| 66,7 | 6 | 400,2 | 83,3 | 133 | 11078,9 |
| 67,9 | 1 | 67,9 | 84,3 | 9 | 758,7 |
| 69,3 | 9 | 623,7 | 85,5 | 15 | 1282,5 |
| 70,8 | 2 | 141,6 | 86,4 | 15 | 1296,0 |
| 71,4 | 6 | 428,4 | 87,1 | 8 | 696,8 |
| 72,4 | 8 | 579,2 | 88,2 | 4 | 352,8 |
| 73,5 | 4 | 294,0 | 90,7 | 63 | 5603,1 |
| 74,1 | 1 | 74,1 | 91,6 | 8 | 732,8 |
| 75,0 | 63 | 4725,0 | 94,7 | 1 | 94,7 |
| 76,8 | 54 | 4147,2 | 95,2 | 4 | 380,8 |
| 77,3 | 7 | 541,1 | 100,0 | 8 | 800,0 |
| 78,3 | 19 | 1487,7 | 105,6 | 1 | 105,6 |
| 79,2 | 25 | 1980,0 | 107,7 | 2 | 215,4 |
| Total | 208 | 15676,9 | Total | 360 | 30652,7 |

Il ressort du tableau 33 que 103 ou 18,1% des garçons nouveaux-nés sont dolichocéphales, 123 ou 21,7% mésocéphales, 213 ou 37,5% brachycéphales, et 129 ou 22,7% hyperbrachycéphales.

La moyenne arithmétique de l'indice de la tête des garçons ($46329,6 : 568 = 81,5$) est de **81,5**, donc brachycéphalie.

Tableau 34.
Indices de la tête des filles.

| I | II | III | I | II | III |
|---------|------------------|---------------|---------|------------------|---------------|
| Indices | Nombre d'enfants | $I \times II$ | Indices | Nombre d'enfants | $I \times II$ |
| 50,0 | 1 | 50,0 | 81,8 | 100 | 8180,0 |
| 64,3 | 1 | 64,3 | 82,6 | 5 | 413,0 |
| 68,2 | 1 | 68,2 | 83,3 | 126 | 10494,8 |
| 69,3 | 7 | 485,1 | 84,3 | 4 | 337,2 |
| 70,8 | 5 | 354,0 | 85,4 | 14 | 1195,6 |
| 71,4 | 2 | 142,8 | 86,4 | 19 | 1641,6 |
| 72,6 | 13 | 943,8 | 87,1 | 20 | 1742,0 |
| 73,9 | 2 | 147,8 | 88,0 | 2 | 176,0 |
| 75,0 | 57 | 4275,0 | 90,6 | 77 | 6976,2 |
| 76,8 | 25 | 1920,0 | 91,7 | 8 | 733,6 |
| 77,3 | 16 | 1236,8 | 94,4 | 1 | 94,1 |
| 78,5 | 20 | 1570,0 | 95,1 | 3 | 285,3 |
| 79,2 | 29 | 2296,8 | 100,0 | 7 | 700,0 |
| 80,1 | 15 | 1201,5 | | | |
| Total | 194 | 14756,1 | Total | 386 | 32969,4 |

Les indices de la tête des filles sont exposés dans le tableau 34, d'après lequel nous constatons 89 ou 15,4 % des filles

Tableau 35.
Diamètre biacromial des épaules des garçons.

| I | II | III | IV |
|-----------------------------|------------------|--------|---------------|
| Diam. biacr. des épaules cm | Nombre d'enfants | % | $I \times II$ |
| 9 | 4 | 0,70 | 36 |
| 10 | 10 | 1,75 | 100 |
| 10,5 | 7 | 1,22 | 73,5 |
| 11 | 91 | 15,96 | 1001,0 |
| 11,5 | 11 | 1,93 | 126,5 |
| 12 | 178 | 31,22 | 2136 |
| 12,5 | 20 | 3,50 | 250 |
| 13 | 135 | 23,68 | 1755 |
| 13,5 | 6 | 1,05 | 81 |
| 14 | 80 | 14,03 | 1220 |
| 14,5 | — | — | — |
| 15 | 19 | 3,33 | 285 |
| 15,5 | 1 | 0,17 | 15,5 |
| 16 | 4 | 0,70 | 64 |
| Total | 570 | 100,00 | 7143,5 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{7143,5}{570} = 12,53.$$

dolichocéphales, 105 ou 18,1% mésocéphales, 249 ou 42,9% brachycéphales, et 137 ou 23,6% hyperbrachycéphales.

La moyenne arithmétique de l'indice de la tête (47725,5:580) est de 82,3, donc aussi brachycéphalie.

IV. Mesures des épaules, de la poitrine et des hanches.

Tableau 36.

Diamètre biacromial des épaules des filles.

| I | II | III | IV |
|--------------------------------|---------------------|--------|--------|
| Diam. biacr. des épaules cm | Nombre d'enfants | % | I × II |
| 9 | 5 | 0,86 | 45 |
| 9,5 | 1 | 0,17 | 9,5 |
| 10 | 24 | 4,13 | 240 |
| 10,5 | 5 | 0,86 | 52,5 |
| 11 | 93 | 16,03 | 1023 |
| 11,5 | 26 | 4,48 | 299 |
| 12 | 187 | 32,24 | 2244 |
| 12,5 | 22 | 3,79 | 275 |
| 13 | 131 | 22,58 | 1703 |
| 13,5 | 10 | 1,72 | 135 |
| 14 | 63 | 10,86 | 882 |
| 14,5 | 2 | 0,34 | 29 |
| 15 | 6 | 1,03 | 90 |
| 15,5 | 1 | 0,17 | 15,5 |
| 16 | 4 | 0,69 | 64 |
| Total | 580 | 100,00 | 7106,5 |

$$\text{Moyenne arithm.} \frac{7106,5}{580} = 12,25.$$

Les tableaux 35 et 36 indiquent le diamètre biacromial (diameter biacromialis) des épaules. La majorité des nouveau-nés présente un diamètre biacromial des épaules de 12 cm, puis de 13, 11 et 14 cm. Ils se trouvent au nombre de 484 ou 84,89%, les autres étant représentés en très petit nombre.

Le diamètre biacromial des épaules des garçons varie entre 9 et 16 cm, donc de 7 cm.

Le diamètre biacromial des épaules des filles est aussi de 9—16 cm avec une variation de 7 cm.

Les filles naissent aussi le plus souvent avec un diamètre acromial des épaules de 12, 13, 11 et 14 cm. On en constate 474 ou 81,71%.

Le diamètre biacrom. moyen des épaules des garçons est de 12,53 cm

” ” ” ” ” ” ” ” filles ” ” 12,25 ”
 Les deux ensemble 12,39 ”

Tableau 37.

Circonférence de la poitrine des garçons.

| I Circonf. de la poitrine cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|------------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 28 | 1 | 0,18 | 28 |
| 29 | 5 | 0,88 | 145 |
| 30 | 14 | 2,46 | 420 |
| 31 | 31 | 5,44 | 961 |
| 31,5 | 1 | 0,18 | 31,5 |
| 32 | 60 | 10,53 | 1920 |
| 32,5 | 5 | 0,88 | 162,5 |
| 33 | 79 | 13,86 | 2607 |
| 33,5 | 5 | 0,88 | 167,5 |
| 34 | 99 | 17,36 | 3366 |
| 34,5 | 4 | 0,70 | 138 |
| 35 | 89 | 15,61 | 3115 |
| 35,5 | 3 | 0,52 | 106,5 |
| 36 | 73 | 12,81 | 2628 |
| 37 | 51 | 8,95 | 1887 |
| 37,5 | 2 | 0,34 | 75 |
| 38 | 27 | 4,74 | 1026 |
| 39 | 18 | 3,16 | 702 |
| 40 | 2 | 0,34 | 80 |
| 42 | 1 | 0,18 | 42 |
| Total | 570 | 100,00 | 19608 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{19608}{570} = 34,40.$$

La circonférence de la poitrine des garçons est le plus souvent de 34, 35, 33 et 36 cm. Les variations au-dessus et au-dessous sont assez grandes.

La circonférence de la poitrine des filles est pour la plupart de 34, 33, 35 et 32 cm. Chez elles aussi les variations au-dessus et au-dessous sont assez considérables.

Circonférence moyenne de la poitrine des garçons — 34,40 cm

” ” ” ” ” ” ” ” filles — 34,01 ”
 Les deux ensemble 34,20 ”

Tableau 38.
Circonférence de la poitrine des filles.

| I Circonf. de la poitrine cm | II Nombre d'enfants | | III $I \times II$ |
|------------------------------------|------------------------|--------|----------------------|
| | abs. | % | |
| 27 | 1 | 0,17 | 27 |
| 28 | 1 | 0,17 | 28 |
| 29 | 5 | 0,86 | 145 |
| 30 | 20 | 3,45 | 600 |
| 30,5 | 1 | 0,17 | 30,5 |
| 31 | 47 | 8,12 | * 1457 |
| 31,5 | 4 | 0,69 | 126 |
| 32 | 63 | 10,88 | 2016 |
| 32,5 | 2 | 0,35 | 65 |
| 33 | 93 | 16,06 | 3069 |
| 33,5 | 7 | 1,21 | 234,5 |
| 34 | 102 | 17,62 | 3468 |
| 34,5 | 3 | 0,52 | 103,5 |
| 35 | 92 | 15,89 | 3220 |
| 35,5 | 2 | 0,35 | 71 |
| 36 | 55 | 9,50 | 1980 |
| 36,5 | 1 | 0,17 | 36,5 |
| 37 | 41 | 7,08 | 1517 |
| 38 | 26 | 4,49 | 988 |
| 39 | 10 | 1,73 | 390 |
| 40 | 3 | 0,52 | 120 |
| — | — | — | — |
| Total | 579 *) | 100,00 | 19692 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{19692}{579} = 34,01.$$

La majorité des garçons naît avec un diamètre bisiliacal des hanches (diameter bis-iliacalis) de 10, 9 et 11 cm. Nous en comptons 479 ou 84,33 %. Le diamètre bisiliacal des hanches varie entre 7 et 13 cm, donc de 6 cm.

Parmi les filles, nous constatons également un diamètre bisiliacal des hanches de 10, 9 et 11 cm, au total 472 cas ou 82,04 %. Ici aussi il varie de 7—13 cm, c'est-à-dire de 6 cm. Diamètre bisiliacal moyen des hanches des garçons . 9,94 cm.

Les deux ensemble 9,75 "

Afin d'obtenir un aperçu concernant toutes les mesures, nous allons résumer ici les chiffres touchant la moyenne du poids, de la longueur et des autres mesures des nouveaux-nés (tableau 41).

*) Les données manquent pour un enfant.

Tableau 39.
Diamètre bisiliacal des hanches des garçons.

| I | II | III | IV |
|--------------------------|---------------------|--------|--------|
| Diamètre bisiliac. cm | Nombre d'enfants | % | I × II |
| 7 | 1 | 0,17 | 7 |
| 8 | 17 | 2,99 | 136 |
| 8,5 | 12 | 2,11 | 102 |
| 9 | 146 | 25,70 | 1314 |
| 9,5 | 15 | 2,64 | 142,5 |
| 10 | 221 | 38,91 | 2210 |
| 10,5 | 16 | 2,82 | 168 |
| 11 | 112 | 19,72 | 1232 |
| 12 | 24 | 4,22 | 288 |
| 12,5 | 2 | 0,35 | 25 |
| 13 | 2 | 0,35 | 26 |
| Total | 568 | 100,00 | 5650,5 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{5650,5}{568} = 9,94.$$

Tableau 40.
Diamètre bisiliacal des hanches des filles.

| I | II | III | IV |
|--------------------------|---------------------|--------|--------|
| Diamètre bisiliac. cm | Nombre d'enfants | % | I × II |
| 7 | 3 | 0,52 | 21 |
| 7,5 | 1 | 0,17 | 7,5 |
| 8 | 36 | 6,27 | 228 |
| 8,5 | 13 | 2,26 | 110,5 |
| 9 | 153 | 26,65 | 1377 |
| 9,5 | 18 | 3,13 | 171 |
| 10 | 243 | 42,33 | 2430 |
| 10,5 | 12 | 2,10 | 126 |
| 11 | 76 | 13,06 | 836 |
| 11,5 | 1 | 0,17 | 11,5 |
| 12 | 15 | 2,62 | 180 |
| 12,5 | 1 | 0,17 | 12,5 |
| 13 | 2 | 0,35 | 26 |
| Total | 574 | 100,00 | 5597 |

$$\text{Moyenne arithm. } \frac{5597}{574} = 9,75.$$

Tableau 41.
Mesures moyennes des nouveaux-nés.

| Mesures | Garçons | Filles | Garçons et filles | Nombre d'enfants |
|--|---------|--------|----------------------|---------------------|
| Poids | 3623 | 3467 | 3545 | 1151 |
| Longueur | 49,83 | 49,27 | 49,55 | 1146 |
| Circonférence de la tête. | 35,59 | 34,88 | 35,23 | 1150 |
| Diamètre fronto-occ. de la tête | 11,79 | 11,54 | 11,66 | 1148 |
| Diamètre bipariétal de la tête | 9,61 | 9,48 | 9,54 | 1150 |
| Indices de la tête . . . | 81,5 | 82,3 | 81,9 | 1148 |
| Diamètre biacromial des épaules | 12,53 | 12,25 | 12,39 | 1150 |
| Circonférence de la poi- trine | 34,40 | 34,01 | 34,20 | 1149 |
| Diamètre bisiliacal des hanches | 9,94 | 9,75 | 9,84 | 1142 |

V. Aperçu historique.

Comme je l'ai déjà mentionné au commencement du présent travail, peu de données anthropologiques concernant les nouveaux-nés estoniens ont été publiées jusqu'ici.

En 1880, le docteur A. v. Schrenck a publié sa dissertation²⁾ basée sur les matériaux de la clinique gynécologique de l'Université de Tartu, dans laquelle il nous fournit quelques données au sujet des nouveaux-nés estoniens (tableau 42).

Tableau 42.
Poids et mesures des enfants nés à terme.

| | Poids g | Longueur cm | D. obl. | D. rect. | D. tr. maj. |
|---|---------|----------------|---------|----------|-------------|
| Garçons 165 cas | 3315,8 | 50,65 | 13,77 | 12,12 | 9,64 |
| Filles 165 cas | 3149,3 | 48,75 | 13,32 | 11,67 | 9,41 |
| Total 330 cas | 3232,7 | 49,7 | 13,54 | 11,89 | 9,53 |
| Différence entre filles et garçons | 166,5 | 1,9 | 0,45 | 0,45 | 0,23 |

En comparant ces données avec les nôtres (tableau 41), nous constatons une différence sensible entre les unes et les autres.

Les causes de cette différence peuvent être les suivantes :

- 1) le nombre restreint des enfants mesurés par le docteur v. Schrenck;
- 2) la différence de nos méthodes;
- 3) la différence de nos matériaux.

Il ne faut pas oublier qu'à l'époque où furent établies les données de Schrenck, ce n'étaient que les mères et les filles-mères les plus indigentes qui s'adressaient aux cliniques. Parmi les accouchées 38,6 % étaient des femmes mariées et 49,7 % des filles-mères. Chez M. v. Schrenck les données pour le reste de 11,7 % manquent.

Le docteur Körber³⁾, professeur de médecine légale à l'Université de Tartu, a aussi publié à la page 240 de son ouvrage (1884) quelques données concernant les nouveaux-nés estoniens.

Il a mesuré seulement 14 enfants, dont 7 garçons et 7 filles, tous décédés, lors de leur autopsie légale. Il confirme que tous ces enfants étaient nés à terme.

Leur poids moyen était de 3018 g, leur longueur de 50,2 cm, la circonférence de la tête de 32,8 cm, la circonférence de la poitrine de 29,4 cm. Il est difficile de comparer ces données avec celles qui ont été obtenues sur des nouveaux-nés vivants, mais dans quelques œuvres scientifiques de l'étranger, on cite malheureusement les données peu nombreuses du professeur Körber.

L'ouvrage du docteur Bidder⁴⁾ a paru à la clinique gynécologique de l'Université de Tartu en 1893. Il nous fournit entre autre des renseignements au sujet des nouveaux-nés des primipares estoniennes âgées (140 cas). Il écrit à la page 68: „Ich finde bei den Kindern meiner alten Erstgebärenden ein Durchschnittsgewicht von nur 3033 g. Die Länge betrug 50 cm, der Kopfumfang 34,7 cm.“

Le docteur Rooks⁵⁾ dit que chez 875 nouveaux-nés à terme, il a constaté un poids moyen de 3540 g, une longueur de 50,5 cm et une circonférence de la tête de 34,75 cm. Les données du docteur Rooks proviennent de la clinique gynécologique de l'Université de Tartu.

Le statisticien H. Reiman⁶⁾ a publié en 1928 un travail concernant les nouveaux-nés, en se basant sur des données fournies par l'Hôpital Central de la ville de Tallinn. Je ne peux malheureusement pas comparer ses données avec les miennes, nos méthodes de travail étant trop différentes.

A. M. Ritala⁷⁾ nous fournit des données au sujet des nouveaux-nés finnois, à la clinique gynécologique de l'Université de Helsinki, en 1931. Ces données sont exposées dans le tableau 43.

Tableau 43.

| | | Garçons | Filles | Total |
|----------|----------------|---------|--------|-------|
| Matériel | I accouchement | 877 | 841 | 1718 |
| | II " | 871 | 829 | 1700 |
| Poids | I " | 3371 | 3281 | 3327 |
| | II " | 3557 | 3426 | 3493 |
| Longueur | I " | 50,4 | 50,1 | 50,3 |
| | II " | 50,7 | 50,3 | 50,5 |

VI. Les nouveaux-nés estoniens comparés à ceux d'autres nationalités.

Nous apportons ici quelques données internationales, dans le but d'obtenir un aperçu au sujet du poids et de la longueur des nouveaux-nés des autres peuples. Il n'existe que relativement peu de données dans ce domaine; d'autre part, elles sont assez difficiles à obtenir, et, les diverses méthodes d'examen étant très divergentes, il convient de considérer ces données avec toutes les réserves qu'elles peuvent éventuellement mériter. Mais elles nous donnent néanmoins une certaine représentation de l'état des choses. (V. tableaux 44 et 45.)

Tableau 44.

Poids moyen des nouveaux-nés de différentes nationalités.

| Nationalité | Garçons | | Filles | | Total | | Auteur |
|---------------|---------|--------|---------|--------|---------|--------|-----------------|
| | Poids | Nombre | Poids | Nombre | Poids | Nombre | |
| Norvégienne | 3599,15 | 270 | 3452,15 | 283 | 3523,81 | 553 | Kjølseth |
| Suédoise | | | | | 3527 | | Petersen |
| Danoise | 3387 | | 3280 | | | | Heiberg |
| Estonienne | 3623 | 571 | 3467 | 580 | 3545 | 1151 | Lüüs |
| Française | 3350 | 912 | 3250 | 783 | | | Mac-Auliffe |
| Allemande | | | | | | | |
| (Rhénanie) | 3360 | | 3221 | | | | Fourmann |
| Grande-Russie | 3230 | | 3160 | | | | Tschepourkowsky |
| Japonaise | 2940 | | 2780 | | | | Miwa |
| Américaine | | | | | 3525 | | Abott |
| Suisse | | | | | 3172 | | Witzinger |

Tableau 45.

Longueur moyenne des nouveaux-nés de différentes nationalités.

| Nationalité | Garçons | | Filles | | Total | | Auteur |
|-----------------------------|----------|--------|----------|--------|----------|--------|-----------------|
| | Longueur | Nombre | Longueur | Nombre | Longueur | Nombre | |
| Norvégienne | 51,86 | 270 | 50,65 | 283 | 51,24 | 553 | Kjölseth |
| Estonienne | 49,83 | 566 | 49,27 | 580 | 49,55 | 1147 | Lüüs |
| Française | 50,0 | 912 | 49,0 | 783 | | | Mac-Auliffe |
| Allemande | 51,2 | | 50,3 | | | | Daffner |
| Grande-Russie | 50,5 | | 49,5 | | | | Tschepourkowsky |
| Russe (Kharkoff) | 49,5 | | 48,3 | | | | Orschansky |
| Anglaise | 49,6 | | 49,1 | | | | Roberts |
| Japonaise | 49,3 | | 47,8 | | | | Nagahama |
| Juifs russes méridionaux | 50,8 | | 50,0 | | | | Weissenberg |

Si nous comparons le poids et la longueur des nouveaux-nés estoniens avec les mesures correspondantes des nouveaux-nés d'autres nationalités (tableaux 44 et 45), nous constaterons que les nouveaux-nés estoniens se classent parmi les plus grands enfants des nations civilisées et ne peuvent être comparés qu'avec ceux des peuples nordiques.

Le poids des garçons dépasse celui des filles de 156 g ; les enfants légitimes sont aussi de 142 g plus lourds que les enfants illégitimes.

La longueur des nouveaux-nés estoniens est également remarquable et correspond bien aux mesures des nouveaux-nés d'autres nationalités.

Le poids et la longueur des nouveaux-nés dépendent de l'ordre de l'accouchement, se trouvant ainsi en liaison avec l'âge de la mère également, bien que les jeunes mères soient aussi parfaitement capables d'accoucher d'enfants normaux.

La fréquence des jumeaux doit être spécialement soulignée : sur 43,3 accouchements il y en a un à jumeaux, soit 2,3 %. Chez le docteur v. Schrenck ce chiffre s'élève à un accouchement à jumeaux pour 51,7 cas, soit 1,9 %, chez le docteur Bidder nous trouvons 1,5 % ou un accouchement à jumeaux sur 66,5 cas. Veit*) a constaté 1,12 % de jumeaux sur 13 millions d'accouchements.

Il faut également signaler que pour 100 filles il y a seulement 102,5 garçons. En général on compte que pour 100 filles

*) Bidder, loco citato p. 64.

il naît 106,3 garçons. Le docteur Schrenck note ce rapport comme étant de 100:113,3, le docteur Bidder — 100:130,9.

En terminant le présent ouvrage, je me fais le devoir et le plaisir de présenter mes remerciements les plus sincères à M. le professeur J. Miländer, pour l'autorisation qu'il m'a accordée d'employer pour mon travail les feuilles de malades de la section d'accouchement de sa clinique, d'où j'ai pu puiser tous les matériaux qui m'étaient nécessaires, de même que pour la permission d'utiliser la bibliothèque de ladite clinique, qui m'a été d'un grand secours et d'une utilité très importante.

Je remercie bien cordialement le chef du Bureau Municipal de Statistique de Tartu, M. A. Isotamm, et son adjoint, M. W. Laanenbek, qui, avec leur personnel, m'ont aidé à résoudre quelques problèmes d'ordre technique.

Bibliographie.

- 1) Martin, Rudolf, Lehrbuch der Anthropologie. 2. Aufl. Jena 1928.
- 2) Schrenck, August von, Studien über Schwangerschaft, Geburt und Wochenbett bei der Estin. Dissertation. Dorpat 1880.
- 3) Körber, Die Durchschnittsmasse ausgetragener Neugeborener und ihre Lebensfähigkeit, berechnet aus den Jahresberichten der Findelhäuser in St. Petersburg und Moskau. Vierteljahrsschrift f. gerichtl. Med. und öffentl. Sanitätswesen, Bd. 40, 1884.
- 4) Bidder, Friedrich, Über alte Erstgebärende. Dissertation. Mitau 1893.
- 5) Rooks, Gerhard, Mõnda vastsündinud laste ja nende päramiste mõõtu-dest. Eesti Arst 1925, lk. 133.
- 6) Reiman, H., Vastsündinute pikkus, kaal ja peamõõdud Tallinnas 1926—1927. Eesti Statistika 1928, lk. 525.
- 7) Ritala, A. M., Über die anthropologischen Masse des finnischen Neugeborenen. Annales Instituti Obstetrici et Gynecologici Universitatis (Helsinki-Helsingfors), tom. VII, anno MCMXXXI.
- 8) Mac-Auliffe, Dr. Léon, Développement — Croissance. Paris 1923.
- 9) Halban-Seitz, Biologie und Pathologie des Weibes. Bd. VI, Teil 1. Berlin-Wien 1925.
- 10) Kjölnseth, Marie, Untersuchungen über die Reifezeichen des neugeborenen Kindes. Monatsschrift f. Geb. und Gyn., Bd. 38, 1913.
- 11) Gutfeld, Dr. med. Fritz v., Über den Einfluss körperlicher und sozialer Verhältnisse der Mütter auf die Körpermasse ihrer Neugeborenen. Zeitschrift f. Geb. und Gyn., Bd. 73, 1913.

Table des matières.

| | Pages. |
|--|--------|
| I. Matériaux | 3 |
| II. Poids et taille | 5 |
| Poids | 6 |
| Taille | 16 |
| III. Mesures de la tête | 27 |
| IV. Mesures des épaules, de la poitrine et des hanches | 33 |
| V. Aperçu historique | 37 |
| VI. Les nouveaux-nés estoniens comparés à ceux d'autres nationalités . . | 39 |
| Bibliographie | 42 |

ENERGIEVERLUSTE IM EISENBLECH BEI NIEDERFREQUENTER UMMAGNETISIERUNG

VON

ARNOLD TUDEBERG

TARTU 1936

Da gewisse Energiemengen, die in den Eisenteilen von Wechselstrommaschinen durch Ummagnetisierungsprozesse zu Wärme degradiert werden, durch von außen aufgewandte Energie zu decken sind und daher den Wirkungsgrad der Maschinen herabsetzen, so pflegt man sie bekanntlich als Eisenverluste zu bezeichnen.

Wenn die magnetische Induktion in einem mit elektrischem Leitvermögen begabten Körper zeitlichen Änderungen unterworfen ist, werden in diesem Körper elektrische Ströme induziert; es ist also stets mit der Erzeugung Joulescher Wärme durch die induzierten Wirbelströme im Eisenkern bei dessen Ummagnetisierung zu rechnen. Ferner wird bei jedem Magnetisierungszyklus zur Überwindung der molekularen Kräfte der umzu-richtenden Elementarmagnete im Eisen Arbeit geleistet, die sich zum Teil ebenfalls in Wärme umsetzt; es ist dies die sogenannte Hysteresearbeit. Der gesamte Eisenverlust setzt sich also aus zwei voneinander gut unterscheidbaren Teilen zusammen: dem Wirbelstromverlust und dem Hystereseverlust.

Die Berechnung der Eisenverluste zählt zu jenen Kapiteln der allgemeinen Elektrotechnik, in denen man trotz zahlreicher älterer und neuerer Untersuchungen immer noch zu keinem befriedigenden Abschluß gelangt zu sein scheint. Vor mehr als 40 Jahren hat Steinmetz¹ für diese Berechnung eine Formel gegeben, die bisher am meisten benutzt worden ist. Die Steinmetzsche Formel drückt den Eisenverlust (H) durch die Ummagnetisierungsfrequenz (ν) und den Höchstwert (B) der Induktion zweigliedrig aus:

$$H = \eta B^{1.6} + \varepsilon \nu B^2,$$

wobei das erste Glied dem Hystereseverlust, das zweite dem Wirbelstromverlust Rechnung tragen soll — und enthält nur

¹ Chas. Proteus Steinmetz: Einige Bemerkungen über Hysteresis. Elektrotechnische Zeitschrift (= ETZ) **12** (1891), S. 62 f. — Experimentelle Bestimmungen des Energieverlustes durch Hysteresis und seiner Abhängigkeit von der Intensität der Magnetisierung. ETZ **13** (1892), S. 43—48 u. 55—59. — Das Gesetz der magnetischen Hysteresis und verwandte Phänomene des magnetischen Kreislaufes. ETZ **13** (1892), S. 519—522, 531—534, 545—550, 563—566, 575—579, 587—591, 599—602.

zwei Materialkonstanten, η und ε . Im Laufe der Zeit sind nun beträchtliche Abweichungen von diesem Gesetz festgestellt worden, in dem Sinne, daß die Koeffizienten η und ε eigentlich keine Konstanten sind² und auch der Exponent 1·6 nicht für alle Eisensorten gleich gut paßt³. Vidmar⁴ ist der Meinung, daß dieser Exponent — mindestens für hochlegierte Bleche — durch einen wesentlich größeren zu ersetzen sei, und rechnet der Einfachheit halber mit der zweiten Potenz der Maximalinduktion. Den Steinmetzschen Wirbelstromkoeffizienten ε hat man übrigens auf Grund theoretischer Erwägungen auch durch andere physikalische Charakteristiken ausgedrückt⁵, jedoch mangelt es diesen Ausdrücken entweder an theoretischer Strenge oder an praktischer Anwendbarkeit.

Über die Größenverhältnisse der beiden Verlustarten gehen die Angaben der verschiedenen Autoren weit auseinander. Nach Steinhaus⁶ beträgt der Hystereseverlust in einem hochlegierten Eisenblech 1·06 und der Wirbelstromverlust 0·16 Watt pro kg bei einer Frequenz von 50 sec⁻¹ und der Maximalinduktion 10⁴ Gauß; nach Vidmar⁷ wird unter gleichen Umständen ein hochlegiertes Blech etwa 0·5 Watt/kg Hystereseverlust und 0·8 Watt/kg Wirbelstromverlust aufweisen. Auf 8 Watt Leistungsverlust durch Wirbelströme kommen also — bei ein und derselben Blechsorte und unter denselben physikalischen Ver-

² A. Ebeling u. Erich Schmidt: Über magnetische Eigenschaften der neueren Eisensorten und den Steinmetzschen Koeffizienten der magnetischen Hysteresis. ETZ **18** (1897), S. 276—278. — F. Niethammer: Magnetische Hysteresis und Wirbelströme. ETZ **19** (1898), S. 669—671 u. 688—690. — W. Peukert: Über die Trennung der Eisenverluste bei Wechselstromtransformatoren. ETZ **20** (1899), S. 674—677. — A. Kühns: Beitrag zur Untersuchung der Wirbelströme in Eisenblechen. ETZ **27** (1906), S. 901—906.

³ F. Stroude, The Electrician **69** (1912), S. 606 [referiert in ETZ **34** (1913), S. 302 unter dem Titel: Eine Nachprüfung des Steinmetzschen Exponenten für Transformatorenblech, legiertes Blech und Gußeisen].

⁴ Milan Vidmar: Vorlesungen über die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik (Berlin 1928), S. 148 f.

⁵ E. Kittler u. W. Petersen: Allgemeine Elektrotechnik **2** (Stuttgart 1909), S. 449 f. — G. Benischke: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik, 6. Aufl. (Berlin 1922), S. 281 f. — Die Abhängigkeit der Eisenverluste von der Kurvenform. ETZ **22** (1901), S. 52—57.

⁶ Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel), **15** (Berlin 1927), S. 182 u. 188.

⁷ Op. cit.⁴, S. 149.

hältnissen — bei dem einen Verfasser 53, bei dem anderen nur 5 Watt Hystereseverlust.

Im folgenden wollen wir, vom Induktionsgesetze ausgehend, zunächst kurz die Messung der maximalen magnetischen Induktion im Eisen bei einem einfachen Magnetisierungszyklus besprechen, sodann zur Bestimmung des Wirbelstromverlustes eine Formel ableiten und daraus einige Folgerungen ziehen. Ferner werden wir eine Anordnung zur Messung des gesamten Eisenverlustes bei Wechselstrommagnetisierung betrachten und ein einfaches Verfahren zur Ermittlung des Hystereseverlustes finden. Es wird sich zeigen, daß bei den in der Technik vorkommenden Maximalinduktionen das Verhalten eines Bleches hinsichtlich der beiden Verlustarten durch übliche Materialkonstanten — die Dichte, den spezifischen elektrischen Widerstand und die zwei Verlustziffern — und räumliche Abmessungen mit hinreichender Genauigkeit charakterisiert ist; es wird auch möglich sein, die beiden Verluste aus diesen Daten zu berechnen.

§ 1. Induktionsgesetz. Maximalinduktion.

Bezeichnet man die elektrische Feldstärke und die magnetische Induktion — beides auf das Maxwellsche elektromagnetische Maßsystem bezogen —, wie üblich, mit \mathfrak{E} und \mathfrak{B} , so schreibt sich die zweite Maxwellsche Feldgleichung bekanntlich in der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = - \text{rot } \mathfrak{E}. \quad (1)$$

Es sei C irgendeine geschlossene Kurve, ds ihr vektorielles Bogenelement, F ein beliebiges, von C berandetes Flächenstück und $d\mathfrak{f}$ sein (entsprechend gerichtetes vektorielles) Flächenelement; durch Integration und Anwendung des Stokesschen Satzes ergibt sich dann aus (1):

$$\int_F \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} d\mathfrak{f} = - \int_F \text{rot } \mathfrak{E} d\mathfrak{f} = - \int_C \mathfrak{E} ds, \quad (2)$$

eine allgemeine Beziehung zwischen der zeitlichen Änderung des Induktionsflusses und der induzierten elektrischen Potentialdifferenz. Wenn nun C eine einfache ebene Kurve ist und

der Vektor \mathfrak{B} in allen innerhalb der Kurve C liegenden Punkten dieser Ebene immer den gleichen, nur von der Zeit abhängigen Wert hat und stets senkrecht zur Ebene steht, vereinfacht sich die Gleichung (2) zu:

$$q \cdot \frac{dB}{dt} = - \int_C \mathfrak{E} ds, \quad (3)$$

indem man für F dieses von C umschlossene Ebenenstück wählt, seinen Flächeninhalt mit q bezeichnet und unter B die Komponente von \mathfrak{B} in der Richtung der Normale dieser Ebene versteht (es ist also $\mathfrak{B} = B \mathbf{n}$, wenn \mathbf{n} den Einheitsvektor der Normale bedeutet). Schließt sich aber die Kurve C erst nach w -maligem Umlauf um dasselbe ebene Flächenstück — repräsentiert sie also eine flache Spule aus w Windungen —, so hat man anstatt (3):

$$w q \frac{dB}{dt} = - \int_C \mathfrak{E} ds \quad (4)$$

zu schreiben, weil ja in der Gleichung (2) einer solchen Kurve C ein w -blättriges Flächenstück F entspricht.

Drückt man die in der Gleichung (4) enthaltenen Größen im praktischen Maßsystem aus, also die magnetische Induktion B in Gauß (= 1 elektromagn. CGS-Einheit) und die durch das rechtsstehende Linienintegral dargestellte elektrische Potentialdifferenz oder elektromotorische Kraft e in Volt (= 10^8 elektromagn. CGS-Einheiten), so erhält man:

$$w q \frac{dB}{dt} = - e \cdot 10^8. \quad (5)$$

Nimmt nun die Induktion B zur Zeit t_1 den Wert B_1 und zur Zeit t_2 den Wert B_2 an, so folgt aus (5) durch Integration:

$$B_2 - B_1 = - \frac{10^8}{w q} \int_{t_1}^{t_2} e dt. \quad (6)$$

Die Gleichung (6) kann zur Bestimmung der Maximalinduktion B eines einfachen Magnetisierungszyklus etwas umgeformt werden. Die Induktion B durchläuft während der einen Hälfte eines einfachen Zyklus die Werte von $-B$ bis B monoton, und während der anderen Hälfte dieselben Werte in

umgekehrter Reihenfolge; vollzieht sich eine der beiden Hälften in der Zeit von t_1 bis t_2 , so gilt nach (6):

$$B = \frac{10^8}{2 w q} \left| \int_{t_1}^{t_2} e \, dt \right|. \quad (7)$$

Wie gesagt, nimmt B zu den Zeiten t_1 und t_2 seine Extremwerte an und verläuft zwischen t_1 und t_2 monoton; folglich wird nach (5) der Integrand e in (7) an beiden Integrationsgrenzen verschwinden und im Innern des Integrationsintervalls ein beständiges Vorzeichen haben.

Wenn wir also einen Eisenkörper wiederholt ummagnetisieren und dafür sorgen, daß die Induktion in einer senkrecht zur Feldrichtung stehenden Ebene homogen ist (d. h. in allen Punkten dieses Querschnitts die Momentanwerte der Induktion gleich sind), so können wir zur Messung der dort herrschenden Maximalinduktion eine daselbst um den Körper gewickelte flache Spule verwenden, in der Weise, daß wir den zeitlichen Verlauf der induzierten elektromotorischen Kraft registrieren und ihr Zeitintegral über eine Halbwelle⁸ bilden. Damit wir es mit einem einfachen Magnetisierungszyklus zu tun haben, soll die induzierte elektromotorische Kraft während der betreffenden Welle genau einen Vorzeichenwechsel erleiden und ihr Zeitintegral, einmal über die eine Halbwelle, das andere Mal über die andere Halbwelle sich erstreckend, den gleichen Absolutbetrag haben.

§ 2. Wirbelstromverlust.

Wir betrachten einen b cm breiten Streifen aus d cm starkem Blech ($d < b$), in dessen Innerem eine räumlich homogene zeitlich veränderliche Induktion \mathfrak{B} herrscht. Der Vektor \mathfrak{B} möge stets die Längsrichtung des Streifens haben, so daß in den Rechnungen nur seine auf diese Richtung fallende Komponente B

⁸ Es ist dabei vollkommen gleichgültig, ob die beiden Hälften des Magnetisierungszyklus gleich lange dauern oder nicht, ob also die beiden durch einen Vorzeichenwechsel getrennten Halbwellen der induzierten elektromotorischen Kraft zu gleichen oder ungleichen Zeitintervallen gehören.

auftreten wird. Alle Punkte innerhalb des Blechstreifens, deren kleinste Entfernung von der Oberfläche des Streifens mindestens

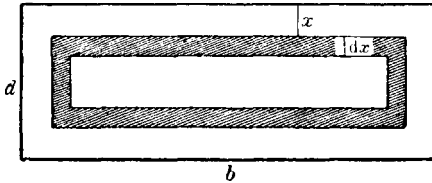


Abb. 1.

x und höchstens $x + dx$ cm beträgt ($x < \frac{1}{2} d$), bilden eine Schicht; der Querschnitt dieser Schicht ist ein von zwei Rechtecken begrenztes (in Abb. 1 schraffiertes) Flächenstück. Wenn die magnetische Induktion sich mit der Zeit

ändert, wird in dieser Elementarschicht die elektromotorische Kraft

$$-(b - 2x)(d - 2x) \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-8} \quad (8)$$

induziert, da ja in ihrem beliebigen Querschnitt (senkrecht zu der Längsrichtung) ein Stromfaden das gleiche ebene Flächenstück vom Inhalt $(b - 2x)(d - 2x)$ umschlingt⁹. Der spezifische Widerstand (in $\Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$ gemessen) des Blechmaterials sei mit ϱ bezeichnet. In der betrachteten Blechschicht wird ein Strom kreisen und Joulesche Wärme erzeugen.

Wir denken uns nun durch zwei Querschnitte ein Stück von der Länge l cm aus dem Blechstreifen herausgeschnitten, das also die Form eines Quaders mit den Kantenlängen l , b und d hat, und berechnen den durch die Wärmeerzeugung verursachten Leistungsverbrauch im ausgeschnittenen Teil der betrachteten Elementarschicht. Die Länge der Strombahn ist $2(b - 2x + d - 2x)$ cm und der Querschnittsinhalt $l dx$ cm², der Widerstand (in Ω) daher

$$\frac{2(b + d - 4x) \cdot 10^{-2}}{l dx \cdot 10^2} \cdot \varrho = 2\varrho \cdot \frac{b + d - 4x}{l dx} \cdot 10^{-4}. \quad (9)$$

⁹ Die Annahme, daß die Wirbelstrombahnen durch derartige Schichten darstellbar sind, entspricht der Vorstellung, daß in gleicher Tiefe unterhalb der Oberfläche überall gleiche Stromdichte herrscht. Hingegen stößt die Vorstellung, daß die Strombahn dem Querschnittsrand des Streifens ähnlich ist (wie z. B. bei Kittler, *op. cit.*⁵, S. 450 oder bei Vidmar, *op. cit.*⁴, S. 145: Abb. 94), auf die Schwierigkeit, daß im Falle $d < b$ die Stromdichte an den kürzeren Seiten dieser Bahn unverhältnismäßig kleiner ist als an den längeren Seiten, wofür eigentlich jeder erfaßbare Grund fehlt; nach der Annahme, daß die Wirbelstrombahnen lauter Rechtecke mit den Seiten b und $d - 2x$ sind (wie etwa bei Kittler, *ibid.* S. 449), wird aber die Stromdichte an den kürzeren Seiten der Bahn unendlich groß.

Aus der elektromotorischen Kraft (8) und dem Widerstand (9) folgt die Stromstärke ¹⁰

$$-\frac{(b-2x)(d-2x)}{b+d-4x} \cdot \frac{l dx}{2\varrho} \cdot \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-4}$$

und somit die auf Wärmeerzeugung verbrauchte Elementarleistung (in Watt)

$$\frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx. \quad (10)$$

Der gesamte Leistungsverbrauch im ausgeschnittenen Quader setzt sich additiv aus den in allen möglichen Schichten gebildeten Beiträgen (10) zusammen und drückt sich folglich durch das Integral

$$\int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx$$

aus. Der Leistungsverbrauch pro Volumeinheit (1 cm³) des Bleches beträgt demnach

$$\begin{aligned} & \frac{1}{l b d} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} \cdot \frac{l}{2\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2 \cdot 10^{-12} \cdot dx \\ &= \left\{ \frac{1}{2 b d} \int_0^{\frac{d}{2}} \frac{(b-2x)^2(d-2x)^2}{b+d-4x} dx \right\} \cdot \frac{10^{-12}}{\varrho} \cdot \left(\frac{dB}{dt}\right)^2. \end{aligned}$$

In den geschweiften Klammern steht ein Faktor, der nur von

¹⁰ Es wäre verkehrt, die Stromstärke hier, wie sonst üblich, der Differentialgleichung eines allgemeinen (kapazitätsfreien) Stromkreises

$$L \frac{di}{dt} + R i - e = 0$$

(worin i die Stromstärke, e die aufgedrückte Spannung, R den Ohmschen Widerstand, L die Induktivität und also das Glied $L \frac{di}{dt}$ die „Extraspannung“ bedeutet) zu entnehmen, da das durch den Strom hervorgerufene magnetische Feld von demjenigen Felde, wo die „aufgedrückte“ Spannung induziert wird, im Falle eines Wirbelstromkreises gar nicht trennbar ist. Vielmehr summieren sich die durch Wirbelströme hervorgebrachte magnetische Feldstärke und die primäre (äußere) magnetische Feldstärke vektoriell, und erst der resultierenden Feldstärke entspricht die Induktion B ; die durch den Ausdruck (8) gegebene elektromotorische Kraft übernimmt daher die Rolle der Differenz von „Klemmenspannung“ und „Extraspannung“.

der Blechstärke d und der Breite b abhängt; wir wollen diesen Faktor kurz mit $K_{b,d}$ bezeichnen:

$$K_{b,d} = \frac{1}{2bd} \int_0^d \frac{(b-2x)^2 (d-2x)^2}{b+d-4x} dx. \quad (11)$$

Ist nun δ die Dichte (in $\frac{g}{cm^3}$) des Blechmaterials, so berechnet sich der Leistungsverbrauch pro Kilogramm zu

$$K_{b,d} \cdot \frac{10^{-9}}{q\delta} \cdot \left(\frac{dB}{dt} \right)^2.$$

Wenn insbesondere B eine periodische Funktion der Zeit und ν die Frequenz (Periodenzahl in einer Sekunde) ist, beträgt der Leistungsumsatz pro kg im Mittel

$$K_{b,d} \cdot \frac{10^{-9}}{q\delta} \cdot \nu \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt = V^{(w)} \quad (12)$$

(t_0 ist ein beliebiger Zeitpunkt). Diesen Mittelwert $V^{(w)}$ pflegt man Wirbelstromverlust zu nennen.

Werden nun mehrere Blechstreifen von der betrachteten Art bei Verwendung dünner isolierender Zwischenlagen übereinandergeschichtet, also zu einem Bündel mit rechteckigem Querschnitt (vom Flächeninhalt q), und wird um dieses Paket eine aus w Windungen bestehende Spule gewickelt, so kann man diese Spule zur Messung der durch (12) gegebenen Größe $V^{(w)}$ benutzen. Es wird bei periodischer Änderung von B (die Induktion sei im ganzen Bündel homogen) in der Spule die elektromotorische Kraft

$$- w q \frac{dB}{dt} \cdot 10^{-8}$$

induziert, deren Effektivwert E bekanntlich durch die Gleichung

$$\begin{aligned} E^2 &= \nu \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} w^2 q^2 \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 \cdot 10^{-16} dt \\ &= w^2 q^2 \nu \cdot 10^{-16} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{1}{\nu}} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2 dt \end{aligned}$$

gegeben ist. Somit ergibt sich aus (12) die folgende Beziehung:

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{\varrho \delta w^2 q^2} \cdot E^2. \quad (13)$$

Wenn die Größen b , d , ϱ , δ und q bekannt sind, reduziert sich also die Bestimmung des Wirbelstromverlustes $V^{(w)}$ auf die Messung der effektiven elektromotorischen Kraft, die in einer an dem Blechpaket angeordneten Spule induziert wird; natürlich muß man dabei die Windungszahl w der Spule kennen.

Die Größen b und d gehen die Beziehung (13) durch das Integral ein, das wir nach (11) mit $K_{b,d}$ bezeichnet haben; nach Ausführung der Integration erhalten wir:

$$K_{b,d} = \frac{(b-d)^4}{128 b d} \log \operatorname{nat} \left(\frac{b+d}{b-d} \right) - \frac{1}{64} (b^2 - 4 b d + d^2).$$

Setzen wir sodann für den Logarithmus seine Maclaurinsche Reihe ein, die im Falle $d \ll b$ sehr rasch konvergiert — es ist nämlich

$$\log \operatorname{nat} \left(\frac{b+d}{b-d} \right) = \log \operatorname{nat} \left(1 + \frac{2d}{b-d} \right) = \frac{2d}{b-d} - \frac{1}{2} \left(\frac{2d}{b-d} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2d}{b-d} \right)^3 - \dots,$$

so ergibt sich:

$$K_{b,d} = \frac{d^2}{12} \left(1 - \frac{d}{b} + \frac{3d^2}{5b(b-d)} - \dots \right).$$

Für einen 10 cm breiten Streifen aus 1 mm starkem Blech ist z. B.

$$K_{10,0.1} = 8.2505 \cdot 10^{-4};$$

für 3 cm breite Streifen, wie sie etwa im Epsteinschen Eisenprüfer verwendet werden, wird aber

$$K_{3,0.1} = 8.0610 \cdot 10^{-4}.$$

Der Unterschied ist ziemlich gering; der Quotient der beiden Zahlen beträgt 1.0235, die relative Abweichung (auf $K_{3,0.1}$ bezogen) daher 2.35%. Ist der Blechstreifen so breit, daß der Quotient $\frac{d}{b}$ gegenüber 1 vernachlässigbar klein ist, so wird man anstatt $K_{b,d}$ einfach den Grenzwert

$$\lim_{b \rightarrow \infty} K_{b,d} = \frac{d^2}{12}$$

benutzen können; wir bezeichnen diesen Wert mit $K_{\infty,d}$. Für 1 mm starkes Blech ist beispielsweise $K_{\infty,0.1} = 8.3333 \cdot 10^{-4}$.

Zum Vergleiche seien hier noch die Koeffizienten $K_{3,d}$, $K_{10,d}$ und $K_{\infty,d}$ und ihre prozentuellen Unterschiede für die gebräuchlichsten Blechstärken 0.5 mm und 0.35 mm (d. h. für $d = 0.05$ bzw. 0.035) notiert.

$$\begin{aligned} K_{3,0.05} &= 2.0490 \cdot 10^{-4} \\ K_{10,0.05} &= 2.0729 \cdot 10^{-4}, & K_{10,0.05} / K_{3,0.05} - 1 &= 1.17 \% \\ K_{\infty,0.05} &= 2.0833 \cdot 10^{-4}, & K_{\infty,0.05} / K_{3,0.05} - 1 &= 1.67 \% \\ K_{3,0.035} &= 1.0090 \cdot 10^{-4}, \\ K_{10,0.035} &= 1.0173 \cdot 10^{-4}, & K_{10,0.035} / K_{3,0.035} - 1 &= 0.82 \% \\ K_{\infty,0.035} &= 1.0208 \cdot 10^{-4}, & K_{\infty,0.035} / K_{3,0.035} - 1 &= 1.17 \% \end{aligned}$$

Wir wollen nun das Ergebnis (13) auf den konkreten Fall eines Epsteinapparates spezialisieren und mit einem Zahlenbeispiel belegen.

Im Epsteinschen Eisenprüfapparat verwendet man vier Blechpakete, je von 50 cm Länge und 2.5 kg Gewicht; der Flächeninhalt q des Querschnitts berechnet sich daher aus der Dichte δ auf Grund der Gleichung $50 q \delta = 2500$ zu $q = \frac{50}{\delta}$. Die Breite der Blechstreifen beträgt 3 cm, die Sekundärwicklung des Apparates enthält insgesamt 600 Windungen, also $b = 3$, $w = 600$. Setzen wir diese Daten in die Formel (13) ein, so nimmt sie folgende Form an:

$$V^{(w)} = \frac{K_{3,d}}{90} \cdot \frac{\delta}{q} \cdot E^2. \quad (14)$$

Beispiel. Haben wir im Epsteinapparat ein 0.35 mm starkes Material von der Dichte $7.53 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und vom spezifischen Widerstand $0.632 \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$, so ist

$$V^{(w)} = \frac{1.009 \cdot 10^{-4}}{90} \cdot \frac{7.53}{0.632} \cdot E^2 = 1.336 \cdot 10^{-5} \cdot E^2.$$

Bei einer periodischen Ummagnetisierung dieses Bleches möge die in der Sekundärwicklung induzierte elektromotorische Kraft den Effektivwert 120 Volt erhalten; dann beträgt der Wirbelstromverlust $V^{(w)}$

$$1.336 \cdot 10^{-5} \cdot 1.44 \cdot 10^4 = 0.192$$

Watt pro Kilogramm.

§ 3. Eine Anordnung zur Verlustmessung.

Zur Berechnung des Wirbelstromverlustes in einem Blechstreifen nach (13) resp. (14) benötigt man, außer der Kenntnis der Materialkonstanten ϱ und δ und der räumlichen Abmessungen d und b des Streifens, nur noch eine Messung des Effektivwertes E der elektromotorischen Kraft, die in einer an das Blechpaket (von bekanntem Querschnitt) angeordneten Spule (von bekannter Windungszahl) induziert wird. Da hingegen der Hystereseverlust bei einfachen Magnetisierungszyklen vom Maximalwert der magnetischen Induktion abhängt und, als Leistungsverbrauch aufgefaßt, sich auch mit der Ummagnetisierungsfrequenz ändert, wird es bei einer Untersuchung der Eisenverluste beider Art auf die gleichzeitige Messung folgender Größen ankommen:

Frequenz ν (die Periodenzahl in einer Sekunde),

Maximalinduktion B ,

Effektivwert E der induzierten elektromotorischen Kraft und der gesamte Leistungsverlust (Wattverbrauch) W in einem Probekörper, dessen Materialkonstanten ϱ , δ und Charakteristiken d , b der räumlichen Unterteilung bekannt sind.

Abb. 2 zeigt schematisch eine Anordnung¹¹ zur gleich-

¹¹ Bei den vom Verfasser im elektrotechnischen Laboratorium des Staatlichen Materialprüfungsamtes, Tallinn, ausgeführten Messungen wurden folgende Instrumente benutzt:

als A — zwei dynamometrische Amperemeter, Nr. 2076 565 von *Siemens & Halske* für Stromstärken über 1 bis 5 Ampere und Nr. 2004 382 von *S. & H.* für Stromstärken von 1 Ampere und darunter,

W — Wattmeter für Eisenmessungen Nr. 2345 390 von *S. & H.*, mit Vorwiderständen *S. & H.* 1922 161 und *S. & H.* 1922 524 auf einem Kompensator kalibriert (für drei Meßbereiche),

V — dynamometrisches Voltmeter Nr. 714 385 von *Hartmann & Braun*,

P — Epsteinapparat Nr. 2235 622 von *S. & H.*,

O — Siemens-Oszillograph Nr. 2112 908 von *S. & H.*,

\bar{V} — Drehspulvoltmeter Nr. 1748 493 von *S. & H.*,

\bar{A} — ebensolches Amperemeter Nr. 1445 087 von *S. & H.*,

H — eine Stimmgabel mit großer Direktionskraft und daher konstanter (von etwaigen Schwankungen des Erregerstromes unabhängiger) Schwingungsfrequenz; auf Grund gleichzeitiger oszillographischer Aufnahme ihrer Unterbrechungskurven mit verschiedenen Wechselstromkurven wurde die Schwingungsfrequenz auf 452.0 sec^{-1} bestimmt (die Frequenz des Wechselstroms wurde dabei jeweils an der Generatorwelle mit zwei Tachometern gemessen).

zeitigen Messung der erwähnten Größen. Durch die Primärwicklung des Epsteinschen Eisenprüfers P wird über das Ampere-meter A und die Stromspule des Wattmeters W ein Wechselstrom hindurchgeschickt, dessen Frequenz und Stromstärke reguliert werden können; damit die Frequenz keine störenden Schwankungen aufweise, verwendet man als Stromquelle einen

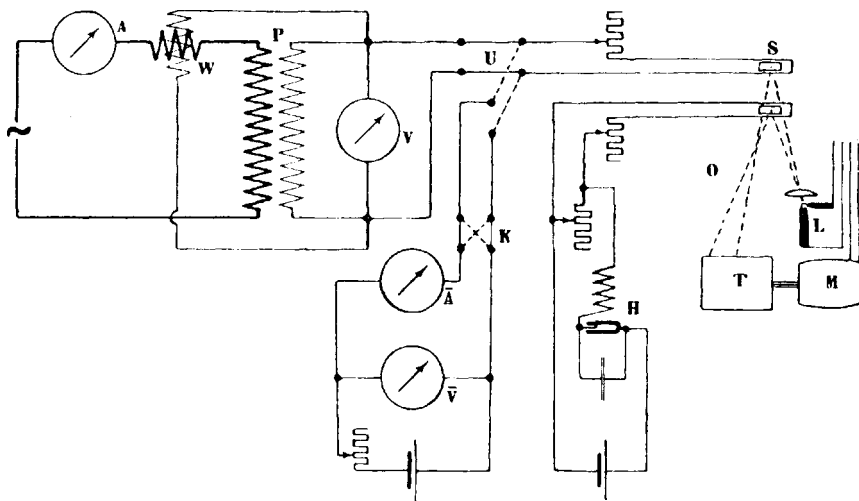


Abb. 2.

Generator, dessen Antriebsmotor durch eine Akkumulatorenbatterie gespeist wird. An die Klemmen der Sekundärwicklung des Epsteinapparates sind ein Voltmeter V, die Spannungsspule des Wattmeters W und die Meßschleife S eines Siemens-Oszillographen parallel geschaltet. Von dem Oszillographen O sind noch gezeigt: die Lichtquelle L, die photographische Trommel T und ihr Antriebsmotor M. Die oszillographische Aufnahme der induzierten Spannung dient einerseits zur Messung der Ummagnetisierungsfrequenz ν und andererseits zur Bestimmung der Maximalinduktion B ; auf jedes Oszillogramm werden dafür eine Zeitmaßkurve und zwei Spannungsmaßgerade aufgetragen. Die Zeitkurve wird (durch eine andere Meßschleife des Oszillographen) von einem periodisch unterbrochenen Gleichstrom geliefert, der also über einen kalibrierten Stimmgabel-Unterbrecher (Wagnerschen Hammer) H geleitet ist. Nach der gleichzeitigen Aufnahme der Spannungskurve und der Zeitkurve wird

die Meßschleife S (mit demselben Vorwiderstande wie bei der Aufnahme der Spannungskurve) durch den Umschalter U in den Gleichstromkreis einer Batterie eingeschaltet; gleichzeitig mit der Aufnahme einer Maßgeraden wird nunmehr die ihr entsprechende Spannung am Voltmeter \bar{V} abgelesen¹²; mit Hilfe des Kommutators K schaltet man die Meßschleife in umgekehrter Richtung ein und wiederholt die Aufnahme. Beidemale wird auch die zugehörige Stromstärke mit dem Amperemeter \bar{A} gemessen.

F r e q u e n z.

Es sei N die bekannte Frequenz des Stimmgabel-Unterbrechers und λ_N die Länge einer Periode der Zeitmaßkurve auf dem Oszillogramm; einer Zeiteinheit (1 sec) entspricht daher auf der Zeitachse eine Strecke von der Länge $N\lambda_N$. Wenn nun die in der Sekundärwicklung des Epsteinapparates induzierte elektromotorische Kraft e_2 in einem Intervall (der Zeitachse) von der Länge λ genau eine Welle bildet, so beträgt ihre Periodendauer $\frac{\lambda}{N\lambda_N}$ sec und die Frequenz also (in sec^{-1} gemessen)

$$\nu = \frac{N\lambda_N}{\lambda}. \quad (15)$$

M a x i m a l i n d u k t i o n.

Gemäß der Formel (7) in § 1 läuft die Messung der Maximalinduktion B darauf hinaus, das über eine Halbwelle sich erstreckende Zeitintegral von e_2 auszuwerten. Wenn der zeitliche Verlauf von e_2 durch ein Oszillogramm bereits graphisch dargestellt ist, braucht man bloß das entsprechende Flächenstück (das von der Zeitachse und einer Halbwelle begrenzt ist) zu planimetrieren und das Meßergebnis — es sei dies etwa $P \text{ cm}^2$ — in passenden Einheiten (elektromotorische Kraft mal Zeit) auszudrücken. Die Einheit in der Zeitrichtung ist, wie wir bei der Besprechung der Frequenzmessung gefunden haben, $N\lambda_N$. Die Einheit in der Spannungsrichtung ergibt sich aus folgender Überlegung. Es sei h die Entfernung zwischen den beiden Spannungsmaßgeraden auf dem Oszillogramm und e' , e'' seien die entsprechenden am Voltmeter \bar{V} abgelesenen Spannungen; daher

¹² Der Spannungsabfall im Amperemeter \bar{A} ist vernachlässigbar gering (in der Regel bleibt er unterhalb der Ablesegenauigkeit des Voltmeters \bar{V}).

erhält man $\frac{h}{e' + e''}$ cm Ausschlag in der Spannungsrichtung auf je 1 Volt Spannungsabfall in demjenigen Stromzweige, der aus der Meßschleife S und ihrem Vorschaltwiderstande besteht. Mit der Einheit $\frac{h}{e' + e''}$ könnte folglich die Klemmenspannung e_k dieses Stromzweiges gemessen werden; jedoch stimmt die Klemmenspannung e_k nicht mit der induzierten elektromotorischen Kraft e_2 überein, sondern es wird zwischen ihnen mit guter Annäherung eine Proportionalität stattfinden. Das wollen wir zeigen und den Proportionalitätsfaktor berechnen.

Der Sekundärstromkreis besteht aus der Sekundärwicklung des Epsteinapparates und drei Zweigen; wir bezeichnen mit i_2 den Momentanwert der Stromstärke in der Sekundärwicklung des Apparates und mit r_2 den Ohmschen Widerstand der Wicklung, mit i_v, r_v die Stromstärke bzw. den Widerstand des Voltmeterzweiges, mit i_w, r_w die entsprechenden Größen des Wattmeterzweiges und mit i_s, r_s diejenigen des Meßschleifenzweiges; ferner schreiben wir der Kürze halber $\frac{1}{R}$ für den Leitwert $\frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s}$ und $\frac{1}{r}$ für $\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s}$.

Es ist nun einerseits

$$i_2 = i_v + i_w + i_s;$$

da die Kapazitäten und Induktivitäten der einzelnen Stromzweige gegenüber ihren Ohmschen Widerständen vernachlässigbar klein sind (die in diesen Zweigen enthaltenen Spulen der Meßinstrumente sind ja eisenfrei), drückt sich demnach i_2 durch die an den Abzweigungsklemmen herrschende Spannung e_k folgendermaßen aus:

$$i_2 = \frac{e_k}{R}.$$

Andererseits besteht zwischen der Stromstärke i_2 und der induzierten elektromotorischen Kraft e_2 die Beziehung:

$$i_2 = \frac{e_2}{r_2 + R}.$$

Folglich ist

$$e_2 = e_k \cdot \frac{r_2 + R}{R} = e_k \left(1 + \frac{r_2}{R} \right) = e_k \cdot \frac{r_2}{r}. \quad (16)$$

Mit Rücksicht auf diese Beziehung zwischen e_2 und e_k finden wir als Einheit zur Messung der elektromotorischen Kraft e_2 auf dem Oszillogramm die Strecke $\frac{h}{e' + e''} \cdot \frac{r}{r_2}$ cm. Aus dem Inhalt P cm² des planimetrierten Flächenstückes ergibt sich nun, wenn man auf die Einheit $N\lambda_N \cdot \frac{h}{e' + e''} \cdot \frac{r}{r_2}$ cm² übergeht, nach der Formel (7) der Wert

$$\frac{10^8}{2 w q} \cdot \frac{P}{N\lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \frac{r_2}{r}$$

für die Maximalinduktion B . Dieser Wert bedarf allerdings noch einer kleinen Korrektur; denn bei der Formel (7) war vorausgesetzt, daß die Spule dicht um den Probekörper gewickelt ist, die Sekundärwicklung des Epsteinapparates umschlingt aber außer dem zu prüfenden Eisenblech auch die Luftschichten zwischen den einzelnen Blechstreifen sowie zwischen Blechpaket und Spule. Der dadurch verursachte Fehler wird mithin um so größer sein, je größere magnetische Feldstärke in den erwähnten Luftschichten herrscht, je größer also die Stromstärke i_1 in der Primärwicklung des Apparates ist. Nach Gumlich¹³ beträgt das Korrektionsglied (in Gauß) $-\gamma J_1$, wobei J_1 den Effektivwert der Stromstärke i_1 bedeutet und der Faktor

$$\gamma = \begin{cases} 6 & \text{für unlegiertes Blech} \\ 7 & \text{„ schwachlegiertes „} \\ 8 & \text{„ mittellegiertes „} \\ 9 & \text{„ hochlegiertes „} \end{cases}$$

zu setzen ist.

Der endgültige Wert der Maximalinduktion ist daher

$$B = \frac{10^8}{2 w q} \cdot \frac{P}{N\lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \frac{r_2}{r} - \gamma J_1. \quad (17)$$

Wirbelstromverlust.

Zwischen dem Effektivwert E_2 der (in der Sekundärwicklung) induzierten elektromotorischen Kraft und der effektiven

¹³ Handbuch der Physik (herausgegeben von H. Geiger u. K. Scheel) 16 (Berlin 1927), S. 743.

Klemmenspannung E_k besteht dieselbe Beziehung wie zwischen den Momentanwerten:

$$E_2 = E_k \cdot \frac{r_2}{r}.$$

In der Formel (13) tritt aber der Effektivwert derjenigen elektromotorischen Kraft auf, die in einer dicht um das Blechpaket gewickelten Spule induziert würde, wenn die einzelnen Blechstreifen auch noch dicht aufeinander gepreßt (also unter Verwendung verschwindend-dünner Isolierschichten zusammengepackt) wären. Entsprechend der von Gumlich angegebenen Korrektur bei B , hat man für E in (13) etwa $E_2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B + \gamma J_1}\right)$ oder einfacher $E_2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B}\right)$ einzusetzen. Es wird somit

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{q \delta w^2 q^2} \cdot E_2^2 \left(1 - \frac{\gamma J_1}{B}\right)^2$$

oder, wenn wir E_2 durch E_k ausdrücken und die (wegen $r_2 \ll R$ und $\gamma J_1 \ll B$) belanglosen Glieder weglassen,

$$V^{(w)} = K_{b,d} \cdot \frac{10^7}{q \delta w^2 q^2} \cdot E_k^2 \left(1 + \frac{2r_2}{R} - \frac{2\gamma J_1}{B}\right). \quad (18)$$

In den meisten Fällen wird allerdings das Glied $-\frac{2\gamma J_1}{B}$ gegenüber der Summe $1 + \frac{2r_2}{R}$ vernachlässigbar klein sein.

Der gesamte Leistungsverbrauch im Probekörper.

Da der am Wattmeter W abgelesene Wert W_a sich auf die Klemmenspannung e_k — anstatt auf die induzierte elektromotorische Kraft e_2 — bezieht, beträgt der mittlere Leistungsverbrauch, gemäß (16),

$$W_a \cdot \frac{r_2}{r}.$$

Davon wird ein Teil im Ohmschen Widerstand des Sekundärstromkreises für Wärmeerzeugung verbraucht, nämlich

$$\begin{aligned} & \frac{E^2}{r_2 + R} \\ &= \frac{E_k^2 r_2^2}{r^2 (r_2 + R)} = \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \cdot \frac{1}{r} = \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}\right) \\ &= \frac{E_k^2 r_2}{r} \cdot \frac{r_2}{r_2 + R} \cdot \frac{R + r_2}{r_2 R} = \frac{E_k^2}{R} \cdot \frac{r_2}{r}. \end{aligned}$$

Der Leistungsverlust im Probematerial ist daher

$$W = W_a \cdot \frac{r_2}{r} - \frac{E_k^2}{R} \cdot \frac{r_2}{r} = \left(W_a - \frac{E_k^2}{R} \right) \frac{r_2}{r}. \quad (19)$$

Hystereseverlust.

Bezeichnen wir den Leistungsverlust pro 1 kg Eisenblech als Eisenverlust V , so gilt $V = 0.1 W$, da der Epsteinapparat 10 kg Probematerial aufnimmt. Nach Subtraktion des aus Formel (18) berechneten Wirbelstromverlustes $V^{(w)}$ verbleibt der durch Hysterese verursachte Leistungsverlust pro kg — der Hystereseverlust

$$V^{(h)} = 0.1 W - V^{(w)}. \quad (20)$$

Resultate.

Wir drücken nun in (17), (18) und (19) die Hilfsgrößen r und R durch r_2 , r_v , r_w und r_s aus und setzen (wie am Schluß des vorigen Paragraphen) $b = 3$, $q = \frac{50}{\delta}$ und $w = 600$. Die erhaltene Formelengruppe

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu = \frac{N \lambda_N}{\lambda} \\ B = \frac{P \delta \cdot 10^4}{6 N \lambda_N} \cdot \frac{e' + e''}{h} \cdot \left(1 + \frac{r_2}{r_v} + \frac{r_2}{r_w} + \frac{r_2}{r_s} \right) - \gamma J_1 \\ V^{(w)} = \frac{K_{3,d}}{90} \cdot \frac{\delta}{\varrho} \cdot E_k^2 \left(1 + \frac{2 r_2}{r_v} + \frac{2 r_2}{r_w} + \frac{2 r_2}{r_s} - \frac{2 \gamma J_1}{B} \right) \\ V^{(h)} = 0.1 W - V^{(w)} \end{array} \right.$$

$$\gamma = \begin{cases} 6 & \text{für } \delta \approx 7.80 \\ 7 & \text{„ } \delta \approx 7.75 \\ 8 & \text{„ } \delta \approx 7.65 \\ 9 & \text{„ } \delta \approx 7.55 \end{cases}$$

$$W = \left[W_a - E_k^2 \left(\frac{1}{r_v} + \frac{1}{r_w} + \frac{1}{r_s} \right) \right] \left(1 + \frac{r_2}{r_v} + \frac{r_2}{r_w} + \frac{r_2}{r_s} \right)$$

gestattet eine indirekte Messung der zusammengehörenden Werte von ν , B , $V^{(w)}$ und $V^{(h)}$, da sie diese Größen durch diejenigen ausdrückt, die entweder 1) bei der geschilderten Meßanordnung beobachtbar bzw. aus Meßergebnissen berechenbar oder 2) für

die verwendete Apparatur konstant sind, oder 3) für das zu prüfende Material als bekannt vorausgesetzt resp. auf anderem Wege gemessen werden können.

Zu der ersten Klasse gehören die Größen λ_N , λ , P und h , die man dem betreffenden Oszillogramm entnimmt, sodann e' , e'' , J_1 , E_k und W_a , die an den Meßinstrumenten \bar{V} , A , V und W abgelesen werden, und schließlich r_s , welches man als Quotienten der an \bar{V} und \bar{A} abgelesenen Werte findet. Zu der zweiten Klasse gehören N , r_2 , r_v und r_w , und zu der dritten: d , q und δ . Übrigens hängt q merklich von der Temperatur ab, und da die Erwärmung des Probematerials eben das Charakteristische bei einer Verlustmessung ist, so hat man nebst q auch seinen Temperaturkoeffizienten zu bestimmen. Durch passende Abkühlungspausen läßt sich auch erreichen, daß die sämtlichen Einzelmessungen einer Verlustmessungsreihe unter praktisch gleicher Temperatur ausgeführt werden; man hat dann also q bloß einmal bei derselben Temperatur zu messen.

A n h a n g.

Zum Schluß seien einige Ergebnisse der auf geschilderte Weise ausgeführten Messungen notiert. Die Wiedergabe aller rechnerischen Einzelheiten würde zu viel Platz beanspruchen und überdies wenig interessant sein; auch hätte es eigentlich keinen Zweck, Messungsprotokolle einer größeren Menge von Materialien an dieser Stelle zusammenzuhäufen. Wir wollen uns daher auf zwei Beispiele beschränken, und zwar die erhaltenen zusammengehörigen Werte von ν , B , $V^{(w)}$, V und $V^{(h)}$ tabulieren.

Tabelle 1.

Material: ein Dynamoblech von Klasse III; $d = 0.05$, $q = 0.481$, $\delta = 7.66$.

| ν | B | $V^{(w)}$ | V | $V^{(h)}$ |
|-------|--------------------|-----------|-------|-----------|
| 60.2 | $1.139 \cdot 10^4$ | 0.503 | 2.804 | 2.301 |
| 59.7 | $0.907 \cdot 10^4$ | 0.314 | 1.811 | 1.497 |
| 50.0 | $1.355 \cdot 10^4$ | 0.507 | 3.122 | 2.615 |
| 49.8 | $1.056 \cdot 10^4$ | 0.301 | 1.929 | 1.628 |
| 39.7 | $1.443 \cdot 10^4$ | 0.376 | 2.706 | 2.330 |
| 39.8 | $1.102 \cdot 10^4$ | 0.212 | 1.661 | 1.449 |

Tabelle 2.

Material: ein Transformatorblech von Klasse IV; $d = 0.035$,
 $q = 0.637$, $\delta = 7.54$.

| ν | B | $V^{(w)}$ | V | $V^{(h)}$ |
|-------|--------------------|-----------|-------|-----------|
| 59.8 | $1.238 \cdot 10^4$ | 0.223 | 2.427 | 2.204 |
| 59.8 | $0.950 \cdot 10^4$ | 0.131 | 1.394 | 1.263 |
| 50.0 | $1.436 \cdot 10^4$ | 0.222 | 2.738 | 2.516 |
| 49.7 | $1.304 \cdot 10^4$ | 0.177 | 2.259 | 2.082 |
| 49.9 | $1.115 \cdot 10^4$ | 0.129 | 1.590 | 1.461 |
| 49.3 | $0.988 \cdot 10^4$ | 0.098 | 1.222 | 1.124 |
| 39.8 | $1.456 \cdot 10^4$ | 0.152 | 2.271 | 2.119 |

§ 4. Hystereseverlust.

Die Energiemenge, die bei einem einfachen Magnetisierungszyklus infolge der Hysterese des Materials in Wärme umgesetzt wird, bezeichnen wir als Hysteresearbeit. Nach dem bekannten Warburgschen Gesetze ist die Hysteresearbeit (pro Volumeinheit des Materials) gleich dem Flächeninhalt derjenigen Hystereseschleife, die dem Magnetisierungszyklus entspricht. Wenn nun die molekularen Umrichtungsvorgänge eine sehr geringe Zeit beanspruchen, so wird bei einer niederfrequenten periodischen Ummagnetisierung in jeder Periode dieselbe Hystereseschleife einmal durchlaufen wie bei einem sehr lange dauernden Zyklus mit gleicher Maximalinduktion. Dann wird also die Hysteresearbeit von der Frequenz unabhängig sein und daher der durch Hysterese verursachte mittlere Leistungsverlust (Hystereseverlust) $V^{(h)}$ den Faktor ν enthalten. Die Hysteresearbeit a_h (in Joule pro kg), die man folglich aus $V^{(h)}$ und ν berechnen kann:

$$a_h = \frac{V^{(h)}}{\nu},$$

wird nunmehr — bei ein und demselben Material, unter konstantgehaltener Temperatur — nur noch von der Maximalinduktion B abhängen. Wollen wir für diese Abhängigkeit eine funktionale Beziehung in irgendeiner Form aufstellen, so haben wir zu beachten, daß eine solche Beziehung den folgenden

Bedingungen genügen muss — was ja im Hinblick auf den physikalischen Inhalt der Größen B und a_h ohne weiteres klar ist:

1) sie ordnet einem jeden nichtnegativen B einen nichtnegativen Wert a_h zu,

2) a_h verschwindet für $B = 0$ und wächst mit wachsendem B monoton und stetig.

So einfach und selbstverständlich diese Forderungen auch sind, schließen sie dennoch z. B. die Möglichkeit aus, daß die von Richter¹⁴ angegebene Formel

$$a_h = \alpha B + \beta B^2$$

eine allgemeine Gültigkeit besitze; denn für den Koeffizienten α kann man aus den Messungen verschiedener B und der zugehörigen a_h sowohl einen positiven als auch (bei manchen Materialien) einen negativen Wert erhalten¹⁵, mit einem negativen α liefert aber der Ausdruck $\alpha B + \beta B^2$ bei hinreichend kleinem B einen negativen Wert.

Wir versuchen im folgenden die Hysteresearbeit a_h einer Potenz der Maximalinduktion B proportional zu setzen, wobei wir den Proportionalitätsfaktor sowie auch den Exponenten als von Material zu Material variierend ansehen. Hinsichtlich der technischen Anwendungen — in der Wechselstromtechnik kommen am häufigsten die Frequenz 50 sec^{-1} und Maximalinduktionen von Größenordnung 10^4 Gauß vor — ist es bequemer den Ansatz in der Form

$$a_h = \frac{\chi}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (21)$$

zu schreiben, wonach der Hystereseverlust (Leistungsverlust in Watt pro kg) $V^{(h)}$ folgendermaßen ausdrückbar wäre:

$$V^{(h)} = \chi \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (22)$$

Den Konstanten χ und ξ kann übrigens eine einfache physikalische Bedeutung beigelegt werden. χ ist der Hystereseverlust bei der Frequenz 50 sec^{-1} und der Maximalinduktion

¹⁴ Rudolf Richter: Ein Vorschlag zur Darstellung der Hysteresewärme. ETZ 31 (1910), S. 1241—1246.

¹⁵ Daß das wirklich der Fall ist, kann durch Beispiele nachgewiesen werden. Die im folgenden, allerdings für andere Zwecke, angeführten Beispiele zeigen das bereits.

10^4 Gauß; ξ ist der Proportionalitätsfaktor der kleinen relativen Zuwächse von Hystereseverlust und Maximalinduktion (bei konstanter Frequenz):

$$\frac{dV^{(h)}}{V^{(h)}} = \xi \cdot \frac{dB}{B},$$

bzw. derjenigen von Hysteresearbeit und Maximalinduktion. Die Formel (21) ist eine Erweiterung der Steinmetzschen Hystereseformel; nach dem Steinmetzschen Gesetze müßte der Quotient der kleinen relativen Zuwächse von a_h und B , d. h. die logarithmische Ableitung $\frac{d(\log a_h)}{d(\log B)}$, ebenfalls konstant sein, aber dazu noch für alle Eisensorten den gleichen Wert 1.6 besitzen.

Zur Prüfung der Formel (21) bedienen wir uns der am Schluß des vorangehenden Paragraphen tabulierten Meßergebnisse v , B und $V^{(h)}$ an zwei Materialien. Um einen Vergleich mit der Genauigkeit der Richterschen und der Steinmetzschen Formel zu ermöglichen, sind nebst den Konstanten χ und ξ auch die Konstanten α^* und β^* für die Formel

$$50 a_h = \alpha^* (B \cdot 10^{-4}) + \beta^* (B \cdot 10^{-4})^2 \quad (23)$$

und die Konstante η^* für die Formel

$$50 a_h = \eta^* (B \cdot 10^{-4})^{1.6} \quad (24)$$

nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet, und zwar aus der Bedingung, daß die Summe der Quadrate der relativen Abweichungen jeweils minimal sein muß¹⁶; die nach den drei Formeln (21), (23) und (24) berechneten Werte von $50 a_h$ sind sodann mit den gemessenen Werten verglichen.

¹⁶ Bezeichnet man die gemessenen zusammengehörigen Werte von $B \cdot 10^{-4}$ und $50 a_h$ kurz mit x_i und y_i , so ergibt sich im Falle von n gemessenen Wertepaaren (i durchläuft die Zahlen 1, 2, ..., n):

$$\log \chi = \frac{\sum (\log x_i)^2 \sum \log y_i - \sum \log x_i \sum \log x_i \log y_i}{n \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2},$$

$$\xi = \frac{n \sum \log x_i \log y_i - \sum \log x_i \sum \log y_i}{n \sum (\log x_i)^2 - (\sum \log x_i)^2},$$

$$\alpha^* = \frac{\sum \frac{x_i}{y_i} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \sum \frac{x_i^2}{y_i} \sum \frac{x_i^3}{y_i^2}}{\sum \frac{x_i^2}{y_i^2} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i^3}{y_i^2} \right)^2}, \quad \beta^* = \frac{\sum \frac{x_i^2}{y_i} \sum \frac{x_i^2}{y_i^2} - \sum \frac{x_i}{y_i} \sum \frac{x_i^3}{y_i^2}}{\sum \frac{x_i^2}{y_i^2} \sum \frac{x_i^4}{y_i^2} - \left(\sum \frac{x_i^3}{y_i^2} \right)^2}, \quad \eta^* = \frac{\sum \frac{x_i^{1.6}}{y_i}}{\sum \frac{x_i^{3.2}}{y_i^2}}.$$

Tabelle 3.¹⁷

| $B \cdot 10^{-4}$ | $50 a_h$ | $\chi = 1.5006, \zeta = 1.8339$ | | $\alpha^* = 0.27758,$ $\beta^* = 1.22216$ | | $\eta^* = 1.5482$ | |
|-------------------|----------|---|------------|--|------------|---------------------------------|------------|
| | | $\chi(B \cdot 10^{-4})\zeta$ | A_1 | $\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) + \beta^*(B \cdot 10^{-4})^2$ | A_2 | $\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}$ | A_3 |
| 0.907 | 1.254 | 1.254 6 | + 0.05 0/0 | 1.257 2 | + 0.25 0/0 | 1.324 3 | + 5.62 0/0 |
| 1.056 | 1.635 | 1.658 3 | + 1.42 | 1.656 0 | + 1.29 | 1.689 2 | + 3.31 |
| 1.102 | 1.820 | 1.793 1 | - 1.48 | 1.790 1 | - 1.65 | 1.808 5 | - 0.63 |
| 1.139 | 1.911 | 1.905 1 | - 0.31 | 1.901 7 | - 0.49 | 1.906 6 | - 0.23 |
| 1.355 | 2.615 | 2.619 5 | + 0.17 | 2.620 0 | + 0.19 | 2.517 2 | - 3.74 |
| 1.443 | 2.935 | 2.939 9 | + 0.17 | 2.945 4 | + 0.35 | 2.783 8 | - 5.15 |
| | | $\sqrt{\frac{\sum A_1^2}{6}} = \sigma_1 = 0.8530/0$ | | $\sigma_2 = 0.899 0/0$ | | $\sigma_3 = 3.73 0/0$ | |

Tabelle 4.

| $B \cdot 10^{-4}$ | $50 a_h$ | $\chi = 1.1708, \zeta = 2.1519$ | | $\alpha^* = -0.20922,$ $\beta^* = 1.38036$ | | $\eta^* = 1.2784$ | |
|-------------------|----------|---|------------|--|------------|---------------------------------|-------------|
| | | $\chi(B \cdot 10^{-4})\zeta$ | A_1 | $\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) + \beta^*(B \cdot 10^{-4})^2$ | A_2 | $\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}$ | A_3 |
| 0.950 | 1.056 | 1.048 4 | - 0.72 0/0 | 1.047 0 | - 0.85 0/0 | 1.177 6 | + 11.51 0/0 |
| 0.988 | 1.140 | 1.140 8 | + 0.07 | 1.140 7 | + 0.06 | 1.253 9 | + 10.00 |
| 1.115 | 1.464 | 1.479 8 | + 1.03 | 1.482 8 | + 1.28 | 1.521 6 | + 3.93 |
| 1.238 | 1.843 | 1.853 5 | + 0.57 | 1.856 6 | + 0.74 | 1.798 9 | - 2.40 |
| 1.304 | 2.095 | 2.072 7 | - 1.06 | 2.074 4 | - 0.99 | 1.954 8 | - 6.70 |
| 1.436 | 2.516 | 2.550 7 | + 1.38 | 2.546 0 | + 1.19 | 2.280 8 | - 9.35 |
| 1.456 | 2.662 | 2.627 7 | - 1.29 | 2.621 6 | - 1.52 | 2.331 9 | - 12.39 |
| | | $\sqrt{\frac{\sum A_1^2}{7}} = \sigma_1 = 0.9790/0$ | | $\sigma_2 = 1.043 0/0$ | | $\sigma_3 = 8.78 0/0$ | |

Aus den Tabellen 3 und 4 ersieht man, daß im Bereich der Maximalinduktion B von etwa 9000 Gauß bis 15000 Gauß die Formel (21) den Verlauf der Hysteresearbeit a_h mit völlig

¹⁷ Es ist

$$A_1 = \frac{\chi(B \cdot 10^{-4})\zeta}{50 a_h} - 1, \quad A_2 = \frac{\alpha^*(B \cdot 10^{-4}) + \beta^*(B \cdot 10^{-4})^2}{50 a_h} - 1, \quad A_3 = \frac{\eta^*(B \cdot 10^{-4})^{1.6}}{50 a_h} - 1$$

$$\text{und } \sigma = \sqrt{\frac{\sum A_i^2}{n}}.$$

befriedigender Genauigkeit beschreibt, und daher auch die Formel (22) den Verlauf des Hystereseverlustes $V^{(h)}$. Die Formel (21) und die Richtersche Formel (23) leisten — in diesem Bereich — offenbar ungefähr gleiches¹⁸, während die Steinmetzsche Formel (24) weit zurückbleibt. Die mittlere relative Abweichung der nach (21) und (23) berechneten Werte von den gemessenen a_h beträgt in den beiden Serien nur ca 1%; dies ist übrigens ein Zeichen dafür, daß die gemessenen Werte von a_h selbst kaum mehr als um 1% ungenau sein können.¹⁹

Ob nun die Formel (21) auch in längeren Bereichen von B ebensogut arbeitet, kann freilich nur die Praxis lehren. Wir prüfen sie hier noch an einer Folge zusammengehöriger Wertepaare a'_h und B , die von Richter nach den „statischen“ Messungen²⁰ von Gumlich und Rose²¹ tabuliert sind.²²

¹⁸ Gewiß darf man bei einem hochlegierten Material, für welches der Koeffizient α^* negativ ist, nach der Richterschen Formel keine Extrapolation bis zu sehr kleinen Induktionen vornehmen; in unserem zweiten Beispiel (Tabellen 2 und 4) wird der nach (23) berechnete Wert von a_h schon bei $B = 1516$ Gauß verschwinden und im Intervall $0 < B < 1516$ negativ sein.

¹⁹ Der Verfasser hat insgesamt an sieben verschiedenen (legierten) Blechproben Verlustmessungen auf geschilderte Weise ausgeführt und Meßergebnisse durchgerechnet. Die mittlere relative Abweichung σ_1 lag stets zwischen 0.8% und 1.8%. Als runder Mittelwert von ζ ergab sich:

| | |
|--|----------------------|
| für schwachlegierte Bleche (Klasse II) | $\zeta \approx 1.7$ |
| „ mittellegierte „ „ III | $\zeta \approx 1.85$ |
| „ hochlegierte „ „ IV | $\zeta \approx 2.1$ |

²⁰ Messungen nach der ballistischen Methode.

²¹ E. Gumlich u. P. Rose: Über die Magnetisierung durch Gleichstrom und Wechselstrom. ETZ 26 (1905), S. 503—509.

²² Wir greifen aus den von Richter nach den Messungen von Gumlich und Rose untersuchten Materialien das am höchsten legierte Blech heraus (op. cit.¹⁴, S. 1245: Tabelle 8); eine einfache Abschätzung zeigt, daß dieses Material nach der heutigen Klassifikation nur ein „schwachlegiertes“ Blech (also zur Klasse II gehörig) gewesen sein kann. Eines der von Richter notierten Wertepaare lautet $B = 10^4$, $a'_h = 2.92 \cdot 10^3$ (Erg pro cm³); bei $B = 10^4$ wäre daher die Hysteresearbeit $a_h = 2.92 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{1000}{\delta}$ (Joule pro kg) und der Koeffizient χ für die Formel (21) mithin:

$$\chi = 50 \cdot 2.92 \cdot \frac{0.1}{\delta} = \frac{14.6}{\delta}.$$

Die Dichte δ war sicherlich zwischen 7.5 und 7.9, so daß man also $1.85 < \chi < 1.95$ findet. Für schwachlegierte Bleche ist eben $\chi \approx 2$, für mittellegierte $\chi \approx 1.5$ und für hochlegierte $\chi \approx 1.1$.

Die Angaben a'_h bedeuten die Hysteresearbeit in Erg, bezogen auf eine Volumeinheit (cm^3) des Materials.

Zur bequemerem Handhabung schreiben wir die Formeln (21), (23) und (24) in der Form:

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \chi' (B \cdot 10^{-4})^\xi \quad (21')$$

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \alpha' (B \cdot 10^{-4}) + \beta' (B \cdot 10^{-4})^2 \quad (23')$$

$$a'_h \cdot 10^{-3} = \eta' (B \cdot 10^{-4})^{1.6} \quad (24')$$

und bestimmen den Exponenten ξ und die Koeffizienten χ' , α' , β' , η' wiederum aus der Minimumforderung der Quadratsumme der relativen Abweichungen.

Tabelle 5.

| $B \cdot 10^{-4}$ | $a'_h \cdot 10^{-3}$ | $\chi' = 2.9331, \xi = 1.6881$ | | $\alpha' = 0.71917, \beta' = 2.18365$ | | $\eta' = 2.8784$ | |
|-------------------|----------------------|--------------------------------|------------|--|------------|---------------------------------|------------|
| | | $\chi' (B \cdot 10^{-4})^\xi$ | Δ_1 | $\alpha' (B \cdot 10^{-4}) + \beta' (B \cdot 10^{-4})^2$ | Δ_2 | $\eta' (B \cdot 10^{-4})^{1.6}$ | Δ_3 |
| 0.4 | 0.626 | 0.624 5 | −0.230% | 0.637 0 | +1.77 0% | 0.664 4 | +6.140% |
| 0.6 | 1.248 | 1.238 3 | −0.78 | 1.217 6 | −2.43 | 1.271 1 | +1.85 |
| 0.8 | 1.988 | 2.012 5 | +1.23 | 1.972 9 | −0.76 | 2.014 1 | +1.31 |
| 1.0 | 2.920 | 2.933 1 | +0.45 | 2.902 8 | −0.59 | 2.878 4 | −1.43 |
| 1.2 | 3.960 | 3.990 2 | +0.76 | 4.007 5 | +1.20 | 3.853 3 | −2.69 |
| 1.4 | 5.250 | 5.176 1 | −1.41 | 5.286 8 | +0.70 | 4.931 2 | −6.07 |
| | | $\sigma_1 = 0.9080\%$ | | $\sigma_2 = 1.408 0\%$ | | $\sigma_3 = 3.850\%$ | |

Wie aus der obigen Tabelle ersichtlich, sind hier — in einem etwa doppelt so langen Bereich wie vorhin — die Formeln (21) und (23) ebenfalls gut brauchbar. Die Formel (21) ist dabei wieder etwas genauer als die Richtersche Formel (23). Gewiß kann es manchmal vorkommen — wenigstens bei einer geeigneten Verteilung der Meßfehler —, daß die Verhältnisse umgekehrt liegen; dennoch ist es sehr wahrscheinlich, daß die Formel (21) durchschnittlich eine genauere Berechnung von a_h gestattet.

§ 5. Methode zur Berechnung der Eisenverluste.

Bekanntlich pflegt man ein Eisenblech hinsichtlich der in ihm bei Ummagnetisierung auftretenden Energieverluste durch die sogenannten Verlustziffern zu charakterisieren. Als Verlustziffer V_{10} bzw. V_{15} bezeichnet man den Mittelwert des Leistungsverlustes (in Watt pro kg) bei einer derartigen periodischen Ummagnetisierung des Bleches, daß die induzierte Spannung (zeitlich) rein sinusförmig verläuft und die Frequenz 50 sec^{-1} und die Maximalinduktion 10^4 Gauß bzw. $1.5 \cdot 10^4$ Gauß beträgt; das Blech soll dabei in 3 cm breiten Streifen verwendet werden und die magnetische Induktion soll die Längsrichtung der Streifen haben.²³

Wir wenden uns nun der Frage zu, ob und wie sich die Größen χ , ξ bzw. α^* , β^* aus den Verlustziffern V_{10} und V_{15} berechnen lassen. Dazu bemerken wir zunächst, daß V_{10} und V_{15} sich aus Hystereseverlust und Wirbelstromverlust zusammensetzen, und schreiben:

$$V_{10} = V_{10}^{(h)} + V_{10}^{(w)},$$

$$V_{15} = V_{15}^{(h)} + V_{15}^{(w)}.$$

Nach § 2 reicht zur Bestimmung des Wirbelstromverlustes die Kenntnis der Dichte δ , des spezifischen Widerstandes ϱ , der Blechstärke d , der Breite b und des Effektivwertes E derjenigen elektromotorischen Kraft aus, die in einer aus w Windungen (je mit dem „Windungsquerschnitt“ q) bestehenden Spule induziert wird. Bezeichnet man mit f den Formfaktor der induzierten elektromotorischen Kraft, d. h. den Quotienten

$$\left| \frac{\sqrt{(t_2 - t_1) \int_{t_1}^{t_2} e^2 dt}}{\int_{t_1}^{t_2} e dt} \right| = f$$

(t_1 und t_2 sind dabei zwei aufeinanderfolgende Nullstellen von e und grenzen eine Halbwelle ein), so drückt sich E durch die

²³ Normalien für die Prüfung von Eisenblech. (Gültig ab 1. Juli 1914.) ETZ 35 (1914), S. 512.

Maximalinduktion B nach der Gleichung (7) folgendermaßen aus:

$$E = 2 w q B \cdot 10^{-8} \cdot \frac{f}{t_2 - t_1},$$

oder, da ja $t_2 - t_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\nu}$ ist,

$$E = 4 w q \nu f B \cdot 10^{-8}. \quad (25)$$

Der Wirbelstromverlust beträgt somit nach (13):

$$\begin{aligned} V^{(w)} &= K_{b,d} \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-8}}{\varrho \delta} \cdot \nu^2 f^2 B^2 \\ &= K_{b,d} \cdot \frac{4000}{\varrho \delta} \cdot f^2 \left(\frac{\nu}{50} \right)^2 (B \cdot 10^{-4})^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Auf Grund der Definition von V_{10} und V_{15} kann der Anteil $V_{10}^{(w)}$ bzw. $V_{15}^{(w)}$ mit den Daten $b = 3$, $\nu = 50$, $f = \pi \sqrt{0.125}$ und $B = 10^4$ bzw. $B = 1.5 \cdot 10^4$ aus der Gleichung (26) berechnet werden; es ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} V_{10}^{(w)} &= 500 \pi^2 \cdot \frac{K_{3,d}}{\varrho \delta} = K_{3,d} \cdot \frac{4\,934.8}{\varrho \delta} \\ V_{15}^{(w)} &= 1125 \pi^2 \cdot \frac{K_{3,d}}{\varrho \delta} = K_{3,d} \cdot \frac{11\,103.3}{\varrho \delta} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Den Hystereseverlust $V^{(h)}$ erhält man dann bei $\nu = 50$ und $B = 10^4$ bzw. $1.5 \cdot 10^4$ ohne weiteres als

$$\left. \begin{aligned} V_{10}^{(h)} &= V_{10} - V_{10}^{(w)} \\ V_{15}^{(h)} &= V_{15} - V_{15}^{(w)} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Aus diesen zwei Werten des Hystereseverlustes können aber die zwei nötigen Konstanten χ und ξ ermittelt werden²⁴; es ist einfach

$$\left. \begin{aligned} \chi &= V_{10}^{(h)}, \\ \xi &= \frac{1}{\log 1.5} \log \frac{V_{15}^{(h)}}{V_{10}^{(h)}} = 5.6789 (\log V_{15}^{(h)} - \log V_{10}^{(h)}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

²⁴ Freilich könnte man statt dessen auch die Koeffizienten α^* und β^* für die Richtersche Formel bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha^* &= 3 V_{10}^{(h)} - \frac{4}{3} V_{15}^{(h)}, \\ \beta^* &= \frac{4}{3} V_{15}^{(h)} - 2 V_{10}^{(h)}. \end{aligned}$$

Somit sind wir zu dem Ergebnis gelangt, daß aus den Größen d , ϱ , δ , V_{10} und V_{15} sowohl der Wirbelstromverlust $V^{(w)}$ als auch der Hystereseverlust $V^{(h)}$ (mithin also der gesamte Eisenverlust V) für gegebene ν , B , f und b berechenbar ist. Die Berechnungsmethode, auf den Beziehungen (22), (26), (27), (28) und (29) fußend, läßt sich folgendermaßen zusammenfassen.

Materialkonstanten:

Dichte $\delta \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

spezifischer Widerstand $\varrho \frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$ (bei der Betriebstemperatur)

Verlustziffern V_{10} und $V_{15} \frac{\text{Watt}}{\text{kg}}$ bei gegebener Blechstärke d cm.

Betriebsdaten:

Frequenz $\nu \text{ sec}^{-1}$

Maximalinduktion B Gauß

Formfaktor (der induzierten Spannung) f

Breite (der Blechstreifen) b cm.

Berechnungsformel:

$$V = \frac{4000 K_{b,d}}{\varrho \delta} \cdot f^2 \left(\frac{\nu}{50} \right)^2 (B \cdot 10^{-4})^2 + \chi \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{\frac{1}{2}}.$$

Hilfsgrößen:

$$K_{b,d} = \frac{d^2}{12} \left(1 - \frac{d}{b} + \frac{3 d^3}{5 b (b-d)} - \dots \right)$$

$$\chi = V_{10} - \frac{4935 K_{3,d}}{\varrho \delta}$$

$$\xi = 5.679 (\log V_{15}^{(h)} - \log \chi)$$

$$V_{15}^{(h)} = V_{15} - \frac{11103 K_{3,d}}{\varrho \delta}.$$

Für die Blechstärken 0.1, 0.05 und 0.035 cm können die

Koeffizienten $K_{b,d}$ und die zu benutzenden Vielfachen von $K_{3,d}$ der folgenden Tabelle entnommen werden.

| d | 0.1 | 0.05 | 0.035 |
|--------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $K_{\infty,d}$ | $8.333 \cdot 10^{-4}$ | $2.083 \cdot 10^{-4}$ | $1.021 \cdot 10^{-4}$ |
| $K_{10,d}$ | $8.251 \cdot 10^{-4}$ | $2.073 \cdot 10^{-4}$ | $1.017 \cdot 10^{-4}$ |
| $K_{3,d}$ | $8.061 \cdot 10^{-4}$ | $2.049 \cdot 10^{-4}$ | $1.009 \cdot 10^{-4}$ |
| $4.934.8 K_{3,d}$ | 3.978 | 1.0111 | 0.4979 |
| $11.103.3 K_{3,d}$ | 8.950 | 2.2750 | 1.1203 |

Die Ausführung der Rechnungen wollen wir an einem Zahlenbeispiel demonstrieren.

Beispiel.

Es habe ein hochlegiertes (0.35 mm starkes) Material die folgenden Charakteristiken:

$$\delta = 7.53, \quad \varrho = 0.632, \quad d = 0.035, \quad V_{10} = 1.28, \quad V_{15} = 2.96,$$

und die Betriebsdaten seien:

$\nu = 60$, $B = 1.35 \cdot 10^4$, $f = 1.102$, $b = 14$ (es werde also das Blech in 14 cm breiten Streifen verwendet).

Dann ist

$$\frac{1}{\varrho \delta} = 0.210_1$$

und somit

$$\chi = 1.28 - 0.4979 \cdot 0.210_1 = 1.28 - 0.104_6 = 1.175,$$

$$V_{15}^{(b)} = 2.96 - 1.120 \cdot 0.210_1 = 2.96 - 0.235 = 2.725,$$

also

$$\xi = 5.679 \cdot \log \frac{2.725}{1.175} = 5.679 \cdot 2.31_9 = 2.07_5;$$

folglich lautet die Berechnungsformel:

$$\begin{aligned} V &= 0.4 \cdot 1.102 \cdot 0.2101 \left(f \cdot \frac{\nu}{50} \cdot B \cdot 10^{-4} \right)^2 + 1.175 \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{2.075} \\ &= 0.0857 \left(f \cdot \frac{\nu}{50} \cdot B \cdot 10^{-4} \right)^2 + 1.175 \cdot \frac{\nu}{50} \cdot (B \cdot 10^{-4})^{2.075}. \end{aligned}$$

Mit den Betriebsdaten ergibt sich daraus der Eisenverlust

$$\begin{aligned} &0.0857 \cdot (1.102 \cdot 1.2 \cdot 1.35)^2 + 1.175 \cdot 1.2 \cdot 1.35^{2.075} \\ &= 0.273 + 2.62_8 = 2.90 \end{aligned}$$

Watt pro kg.

Schlußbemerkungen.

1. Wegen der Abhängigkeit des Wirbelstromverlustes $V^{(w)}$ von der Breite b ist es wesentlich, die Verlustziffern bei einer bestimmten Breite (der Blechstreifen) zu definieren, wie dies durch die Ausführungsbestimmungen in den Normalien für Eisenprüfung geschehen ist²⁵; bei der Berechnung kann man jedoch im Falle $b > 10$ den Koeffizienten $K_{b,d}$ für gewöhnliche Blechstärken fast ausschließlich durch $K_{\infty,d}$ ersetzen.

2. Die in § 3 dargelegte Meßanordnung eignet sich gut zur absoluten Messung der Verlustziffern (also etwa zum Kalibrieren von Normalproben für die van Lonkhuyzensche Vergleichsmethode), da sie keine Einstellung der Frequenz auf 50 sec^{-1} und keinen sinusförmigen Verlauf der induzierten Spannung erfordert. Denn wenn man die Größen χ und ζ für ein Material bestimmt hat (dafür genügt es eigentlich schon, ν und $V^{(h)}$ bei nur zwei möglichst verschiedenen B zu messen), so berechnen sich seine Verlustziffern aus den Beziehungen

$$V_{10} = \chi + V_{10}^{(w)}$$

$$V_{15} = \chi \cdot 1.5\zeta + 2.25 V_{10}^{(w)}$$

mit Hilfe von (27).

3. Der Verfasser ist den Herren Direktoren Prof. Dr.-Ing. O. Maddison und Dipl.-Ing. O. Reinwald zu großem Danke verpflichtet; ihr Entgegenkommen ermöglichte es ihm, für die nötigen experimentellen Untersuchungen die Laboratorien des Staatlichen Materialprüfungsamtes, Tallinn, zu benutzen. Auch möchte er den Herren Ing. A. Liefländer und Ing. E. Foht für ihre bereitwillige Mithilfe bei der Ausführung von Messungen seinen wärmsten Dank aussprechen.

²⁵ *Loc. cit.*,²³

Inhaltsverzeichnis.

| | Seite |
|---|-------|
| Vorwort | 3 |
| § 1. Induktionsgesetz. Maximalinduktion | 5 |
| § 2. Wirbelstromverlust | 7 |
| § 3. Eine Anordnung zur Verlustmessung | 13 |
| § 4. Hystereseverlust | 21 |
| § 5. Methode zur Berechnung der Eisenverluste | 27 |
| Schlußbemerkungen | 31 |

EXISTIERT EINE OBERE GRENZE FÜR DIE DICHTEN DER MATERIE UND DER ENERGIE ?

VON

WILHELM ANDERSON

TARTU 1936

I. TEIL.

Die prinzipielle Seite der vorliegenden Frage.

Literatur über die vorliegende Frage.

Noch vor 15 Jahren schien die Antwort auf diese Frage sehr einfach zu lauten: die Kompression eines jeden Körpers sei gleichbedeutend mit einem Aneinanderschieben seiner Moleküle (resp. Atome). Ein solches Aneinanderschieben könne aber nur bis zur gegenseitigen Berührung der Moleküle ausgeführt werden; jeder weiteren Kompression müsse der Körper einen unendlich großen Widerstand entgegensetzen, da ja die Moleküle „selbstverständlich“ inkompressibel seien. Übrigens wurde eine gewisse Kompressibilität der Moleküle dennoch für möglich gehalten; diese sei aber so gering, daß selbst bei $p = \infty$ das Volumen des Moleküls nur etwas kleiner als bei $p = 0$ sei. Noch im Jahre 1924 sagte J. J. van Laar über die Amagatschen Versuche mit Wasserstoff: „Wie man sieht, ist sogar bei fast 3000 Atm. das Volum noch 1.7 mal größer als das kleinste Volum (etwa $600 \cdot 10^{-6}$), welches erst bei $p = \infty$ erreicht werden kann“¹⁾. An einer anderen Stelle sagt er: „... demnach wird nur bei hohen Temperaturen vielleicht eine gewisse Volumverkleinerung der Moleküle merkbar sein“²⁾.

Es ist auffallend, daß selbst die Bohrsche Theorie den Glauben an die Inkompressibilität der Atome nicht erschüttern konnte. Nach dieser Theorie ist nur ein verschwindend kleiner Teil des Atomvolums tatsächlich von Materie eingenommen (nämlich vom Kern und von den Elektronen); alles übrige ist leerer Raum. Trotzdem wurde geglaubt, daß dieser beinahe leere Raum sogar einem unendlich großen Druck widerstehen könne. Etwa 3 Jahre nach Aufstellung der Bohrschen Theorie

1) J. J. van Laar, Die Zustandsgleichung von Gasen und Flüssigkeiten, S. 16, Leipzig 1924.

2) Ebenda, S. 70.

äußerte Eddington die Meinung, daß $\varrho = 1,5$ als maximale mögliche Dichte der Sonnengase betrachtet werden kann¹⁾.

Inzwischen gewann die Meinung Oberhand, daß im Innern der Sterne die Gase stark ionisiert sein müssen. Es ist erstaunlich, daß selbst diese Meinung den Glauben an die Inkompressibilität der Atome noch nicht erschütterte, wenigstens vorläufig nicht. Die einzige Konsequenz, die man sich aus der Ionisationstheorie zu ziehen getraute, bestand nur in der Herabsetzung des mittleren Molekulargewichts der Stern gases. Im Jahre 1921 schreibt Eddington: „Meine ersten Rechnungen in dieser Theorie wurden unter der Annahme $m = 54$ ausgeführt (entsprechend dem Molekulargewicht des einatomigen Eisendampfes). Ich wurde jedoch von Newall, Jeans und Lindemann unabhängig darauf hingewiesen, daß aller Voraussicht nach bei den hohen Temperaturen im Innern der Sterne eine starke Ionisation stattgefunden hat, indem zahlreiche Elektronen vom Atom abgesprungen sind, und da diese alle als unabhängige Moleküle bei der Berechnung des mittleren Molekulargewichts zu rechnen sind, so wurde dieses stark herabgesetzt. Besonders Mr. Jeans hat mich davon überzeugt, daß dies wahrscheinlich ist“²⁾. Dies alles hat jedoch Eddington nicht verhindert, am Schlusse desselben Aufsatzes zu schreiben: „Maximale Kompressibilität der Materie: $\varrho_0 = 4,0$ für $m = 2,8$; $\varrho_0 = 3,3$ für $m = 4$ “³⁾. Erst etwa 3 Jahre später ändert Eddington seine Meinung: „It appears that in the interior of a star the atoms of moderate atomic weight are stripped down to the K level, and have radii of the order of 10^{-10} cm . . . The maximum density, corresponding to contact of these reduced atomic spheres must be at least 100,000, and any star with mean density below 1000 ought to behave as a perfect gas“⁴⁾. Weiter glaubt Eddington seine neuen Ansichten gegen einen möglichen Einwand verteidigen zu müssen, der vom heutigen Standpunkt sehr naiv erscheinen würde: „It may be asked: Does the removal of outer electrons necessarily reduce the effective size of the atom? Perhaps it is only the boundary stone, not the

1) A. S. Eddington, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **77**, 32, 1916.

2) A. S. Eddington, ZS. f. Phys. **7**, 370, 1921.

3) Ebenda, S. 397.

4) A. S. Eddington, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. **84**, 320, 1924.

boundary, that disappears. The answer seems to be given clearly by physical experiments. An α particle is a helium atom which has lost its "boundary stones", and it appears that it thereby loses its former boundary. It can now enter other atoms, and behaves in every way as a simple charged nucleus with no trace of that resisting boundary which prevents neutral helium gas from being compressed beyond a certain density. It seems clear that the effective size of the atom is determined by the existing peripheral electrons — as we should expect theoretically". — Wenn wir das hier Gesagte erwägen, kommen wir zu dem Schlusse, daß Eddington sich immer noch nicht getraut den letzten Schritt zu tun. Er gibt zwar zu, daß durch genügenden Druck sehr hohe Dichten erzielt werden können, aber dazu müssen vorher die Peripherieelektronen von ihren normalen Plätzen entfernt werden. Ohne dies könne das Atomgerüst selbst bei $p = \infty$ nicht zusammenbrechen. Keine Temperaturionisation — keine Kompressibilität! Solche Ansichten brachten Eddington bald vor ein schwieriges Problem. Nehmen wir an, daß ein heißer Stern mit genügender Gasionisation ein sehr kleines Volumen, also eine sehr hohe Dichte erreicht hat. Was wird nun geschehen, wenn er im Verlaufe der Zeit einmal abkühlt, wenn also die Temperaturionisation aufhört? — Ein kalter Stern von extrem hoher Dichte ist nach Eddington unmöglich. Der Stern müßte sich beim Kaltwerden sehr stark ausdehnen, wobei eine ungeheure Arbeit gegen die Gravitationskräfte zu leisten wäre. Die dazu notwendige Energiemenge kann aber der Stern von nirgends erhalten. Was wird also geschehen? — Eddington entschließt sich zu einer geradezu verzweifelten Lösung: „The star will need energy in order to cool“¹⁾.

Nach Bridgman²⁾ kann ein Gas auch bei niedriger Temperatur durch genügenden Druck ionisiert werden. Das Quantengerüst der Atome leistet einen zwar großen, aber dennoch endlichen Widerstand gegen äußeren Druck; im Innern der Sterne kann es daher zusammenbrechen.

Fowler entwickelt in seinem Aufsatz: „On Dense Matter“³⁾

1) A. S. Eddington, *The Internal Constitution of the Stars*, Cambridge 1926, S. 172.

2) P. W. Bridgman, *Phys. Rev.* (2) **29**, 188, 1927.

3) R. H. Fowler, *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **87**, 114, 1926.

den Gedanken einer „Entartung“ des Elektronengases im Innern der Sterne. Sogar beim absoluten Nullpunkt besitzen die Elektronen hohe Geschwindigkeiten, als ob der Stern ein einziges Riesenmolekel darstellte. Über die obere Grenze der Dichte äußert sich Fowler folgendermaßen: „The density of such „energetic“ matter is the only limited *a priori* by the „sizes“ of electrons and atomic nuclei. The „volumes“ of these are perhaps 10^{-14} of the volume of the corresponding atoms, so that densities up to 10^{14} times that of terrestrial materials may not be impossible. Since the greatest stellar densities are of an altogether lower order of magnitude, the limitations imposed by the „sizes“ of the nuclei and electrons can be ignored in discussion of stellar densities“.

Fowler war nicht der erste, der den Elektronen eine Nullpunktsenergie zuschrieb. Im Jahre 1924 hat Frenkel eine Metalltheorie entwickelt, wo es u. a. heißt: „In solcher Weise werden die Valenzelektronen „freie“ Elektronen... Man muß beachten, daß sie nicht „frei“ im eigentlichen Sinne werden... Aber sie werden von der Alleinherrschaft bestimmter Atome emanzipiert; sie gehören nicht mehr den individuellen Atomen an, sondern dem von diesen gebildeten Kollektiv“ ¹⁾. Und an einer weiteren Stelle: „Beim absoluten Nullpunkt muß jedes Valenzelektron sich auf einer bestimmten, regulären, das ganze Metall durchdringenden Quantenbahn bewegen“ ²⁾.

Heutzutage zweifelt niemand mehr daran, daß bei genügend hohem Druck die Struktur der Atome zusammenbricht. Uns interessiert jedoch die Frage, bis zu welcher maximalen Dichte die zusammengebrochenen Atomtrümmer komprimiert werden können, und ob eine solche endliche maximale Dichte überhaupt existiert. Oben haben wir gesehen, daß nach Fowler eine solche Dichte von der Größenordnung 10^{14} sein müßte. Die Kompression kann nach Fowler so lange fortgesetzt werden, bis die Kerne und die Elektronen einander berühren. Die Kerne und die Elektronen selbst hält Fowler offenbar für absolut inkompressibel, ohne jedoch eine solche Ansicht klar auszusprechen und zu begründen.

Chandrasekhar sagt: „Now ρ_{max} must at lowest estimate

1) J. Frenkel, ZS. f. Phys. **29**, 218 f., 1924.

2) Ebenda, S. 230.

be of the order of 10^{12} grams cm^{-3} "1). Weiter zitiert er Fowlers oben erwähnte Meinung.

Milne sagt: „The next simplest equation of state is that of homogeneous incompressible material $\rho = \rho_{\max}$, where ρ_{\max} is the maximum density of which matter is capable“ 2). Und an einer weiteren Stelle: „We must suppose ρ_{\max} to be given by known physical properties of material such as the radii of electrons and nuclei“ 3).

Stoner sagt: „On a naïve view as to the “sizes” of electrons and nuclei (with radii some 10^{-5} times that of atoms) densities of the order of 10^{14} or 10^{15} would not be impossible“ 4). Und in einem späteren Aufsatz: „Under certain conditions it may be necessary to introduce a further equation of state, corresponding to matter at the highest density of which it is capable, but this need not be considered here“ 5).

Kothari sagt: „It is obvious that ρ could not increase above a certain maximum value ρ_0 . The order of ρ_0 may be comparable to 10^{13} gm./cm.³, for n could be of the order of 10^{39} , as the electrons and nuclei have radii of the order of 10^{-13} cm.“ 6).

Sen sagt: „...if the material has the maximum density of matter, say $3 \cdot 10^{12}$...“ 7).

Einmal habe auch ich mich für die Existenz einer oberen Grenzdichte ausgesprochen, freilich sehr vorsichtig: „Ich persönlich glaube ebenfalls, daß es eine „Grenzdichte“ geben muß; ich vermag aber nicht zu sagen, wie groß sie ist“ 8).

Ausführlicher behandelt unsere Frage Pokrowski 9). Es könne eine Reihe von Tatsachen vorgeführt werden, welche seiner Meinung nach auf die Möglichkeit der Existenz einer oberen Grenze für die Energiedichte deuten. Sollte man der Masse der Atomkerne einen energetischen Ursprung zuschreiben,

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **91**, 463, 1931.

2) E. A. Milne, Monthly Not. R. A. S. **91**, 35, 1930.

3) Ebenda, S. 49.

4) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) **7**, 64, 1929.

5) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 662, 1932.

6) D. S. Kothari, Phil. Mag. (7) **11**, 1131, 1931.

7) N. R. Sen, Monthly Not. R. A. S. **94**, 551, 1934.

8) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

9) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **51**, 730, 1928.

so wäre ihr Radius $r = \frac{2e^2}{3mc^2}$; für die schwersten Atomkerne ergibt dies etwa $\log r = -14,2$, während die direkten Beobachtungen nicht weniger als $-12,5$ ergeben. Diesen beträchtlichen Unterschied glaubt Pokrowski folgendermaßen erklären zu können. Bei $\log r = -12,5$ sei die Energiedichte schon so groß, daß eine weitere Verdichtung bis $\log r = -14,2$ zur Unmöglichkeit werde, da das Prinzip der Superposition der Energiedichten hier offenbar nicht mehr gültig sei. Mit anderen Worten: die Dichte der Materie in den Atomkernen stellt die obere Grenze der Dichte überhaupt dar. Pokrowski glaubt diese Grenze gleich $10^{13 \pm 1}$ ansetzen zu können. Natürlich bedingt eine obere Grenze der Dichte auch eine obere Grenze der Temperatur. Letzteres glaubt Pokrowski noch auf eine ganz andere Art beweisen zu können. Bei einer Temperatur von etwa $3 \cdot 10^{12}$ Grad ist die Energiedichte in den Atomkernen gleich der Dichte der umgebenden strahlenden Energie; die Teilchen werden sozusagen „aufgelöst“ in dem umgebenden Raume, so daß die Existenz diskreter Materieteilchen aufhöre, und deshalb könne man, wie Pokrowski meint, von einer noch höheren Temperatur nicht sprechen. Hat die Temperatur eine obere Grenze, so muß auch die Schwingungsfrequenz ν eine obere Grenze haben. Nach verschiedenen Methoden erhält Pokrowski Werte zwischen $\log \nu = 22,4$ und $\log \nu = 23,9$. Eine dieser Methoden ist unabhängig von der Masse und Dichte der Atomkerne, nämlich die Berechnung von ν auf Grund der Theorie des „Zeitatomismus“ von Robert Lévi. Letzterer glaubt nämlich, daß die Zeit aus unteilbaren „Zeitatomen“ bestehe, die er „Chronone“ nennt. Die Dauer eines Chronons soll $4,5 \cdot 10^{-24}$ Sekunden betragen. Da keine Schwingung kürzere Zeit als ein „Chronon“ dauern kann, so ergibt sich für ν eine obere Grenze, wobei $\log \nu = 23,4$ ist. In einem anderen Artikel ¹⁾ glaubt Pokrowski die Theorie des Zeitatomismus im Spektrum der Höhenstrahlung bestätigt zu finden. Diese Theorie verlangt nämlich, daß jede Wellenlänge ein ganzzahliges Vielfaches von $1,35 \cdot 10^{-13}$ cm sei. Es sei sehr schwer, eine solche Hyperfeinstruktur im sichtbaren Spektrum, im Röntgenspektrum oder im gewöhnlichen γ -Spektrum zu entdecken, da hier die Wellenlängen zu groß seien. Wohl aber sei dies möglich im Spektrum

1) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **51**, 737, 1928.

der Höhenstrahlung. Pokrowski benutzt drei von Millikan und Cameron veröffentlichte Wellenlängen: $8 \cdot 10^{-13}$ cm, $3,8 \cdot 10^{-12}$ cm und $6,34 \cdot 10^{-12}$ cm. Pokrowski findet nun, daß die erste sehr nahe mit $6,1,35 \cdot 10^{-13} = 8,1 \cdot 10^{-13}$ cm übereinstimmt, die zweite mit $28,1,35 \cdot 10^{-13} = 3,78 \cdot 10^{-12}$ cm und die dritte mit $47,1,35 \cdot 10^{-13} = 6,35 \cdot 10^{-12}$ cm. Somit haben sich tatsächlich alle drei als ganzzahlige Vielfache von $1,35 \cdot 10^{-13}$ cm erwiesen. Diese Übereinstimmung findet Pokrowski ausgezeichnet, hält es aber dennoch für möglich, daß wir es hier mit einem bloßen Spiel des Zufalls zu tun haben.

Auch Suzuki beschäftigt sich ausführlich mit unserer Frage. Er sagt: „With the progress of science, it has been found that the various physical quantities have a upper or lower limit, for example the zero degree of absolute temperature, electrons and protons as the primordial smallest matter, light-velocity as the fastest velocity of matter ever attainable, the finite dimension of time-space by the theory of relativity and so on... Now I am going to say that the energy-density has also the upper limit“¹⁾. Dabei kommt aber Suzuki zu der Überzeugung, daß eine obere Grenzdichte mit der Relativitätstheorie unvereinbar sei. Nach letzterer kann die Geschwindigkeit eines materiellen Körpers zwar nie der Lichtgeschwindigkeit gleich werden, aber beliebig nahe an sie heranreichen, wodurch die kinetische Energie beliebig groß werden kann. Wenn jedoch die kinetische Molekularenergie beliebig groß werden kann, so gilt dasselbe auch von der Temperatur und also auch von der Energiedichte. Zur Rettung der Existenz einer oberen Grenzdichte sieht sich daher Suzuki gezwungen, die Relativitätstheorie „etwas“ abzuändern. Er nimmt die Grenzgeschwindigkeit nicht gleich c , sondern gleich V_m an, wobei $V_m < c$ ist. Die maximale mögliche Temperatur erhält er aus der Gleichung:

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V_m^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = \frac{3}{2} k T_m.$$

Die Existenz einer oberen Temperaturgrenze T_m bedingt natürlich auch die Existenz einer oberen Schwingungsgrenze ν_m . Suzuki weist darauf hin, daß beim Compton-Effekt unter

1) Seitarô Suzuki, Proc. Physico-Math. Soc. of Japan (3) 10, 175, 1928.

gewissen Bedingungen die Frequenz ν des einfallenden Lichtquants sich erhöht. Damit dasselbe nicht auch mit ν_m geschehe, sieht sich Suzuki gezwungen, die Gültigkeit des Compton-Effekts in solchen extremen Fällen zu bezweifeln: „Anyhow it must be concluded that Compton's effect does not hold good at an extremely high frequency of a quantum and a rapid velocity of an electron“. In einem anderen Aufsatz verlangt Suzuki die Abänderung der Lorentz-Transformation bei hohen Geschwindigkeiten, damit die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich werde: „...it is rather Lorentz's transformation which is to be modified at the extreme high velocity, but not the notion of the existence of the upper limit of density of energy“¹⁾. In einem späteren Aufsatz (in deutscher Sprache) sagt Suzuki²⁾: „Für diese Hypothese bietet, wie schon bemerkt, die Relativitätstheorie vielleicht die größte Schwierigkeit. Zur Zeit mangelt es meines Erachtens an einem entscheidenden Experiment, das klar zeigen könnte, ob die Relativitätstheorie wirklich bis zur Lichtgeschwindigkeit selbst genau gilt, oder ob diese Theorie falsch ist... Ich bin der Meinung, daß die Annahme einer oberen Grenze der Energiedichte selbst vom klassischen Standpunkt aus berechtigt erscheint“. Hier beschreibt (vom klassischen Standpunkt aus) Suzuki folgendes Gedankenexperiment. In einem Gefäß mit absolut unschmelzbaren und undurchsichtigen Wänden ist Gas eingeschlossen, welches einer adiabatischen Kompression unterworfen wird. Diese Kompression kann bis zum Endstadium fortgesetzt werden, welches eine dichte Packung von Elektronen und Protonen ohne nennenswerte Zwischenräume darstellt. Eine weitere Kompression sei unmöglich, da die Konstituenten als absolut inkompressibel und starr anzusehen seien. „Auf die Frage, ob dieses Energiepaket so viel Licht absorbiert, daß es noch dichter wird, muß geantwortet werden, daß das Lichtquantum auch Dimensionen hat; so daß die Lichtabsorption, selbst wenn sie tatsächlich vorkommt, im wesentlichen kein Ansteigen der Energiedichte hervorruft.“ Wenn ein leeres Gefäß immer mehr erwärmt wird, steigt in seinem Innern die Energiedichte der Hohlraumstrahlung. Bei sehr hohen Temperaturen beginnt die strahlende Energie sich in Elektronen und Protonen zu ver-

1) Seitarō Suzuki, Proc. of the Imperial Academy (Japan) 5, 64, 1929.

2) Seitarō Suzuki, Phys. ZS. 31, 618, 1930.

wandeln, bis wir wieder eine dichte Packung ohne nennenswerte Zwischenräume erhalten. Weiter weist Suzuki auf die beobachtete Tatsache hin, daß die Frequenz verschiedener Strahlen nicht über eine gewisse Grenze hinausgeht: „Selbst die stark durchdringenden Strahlen von Kolhörster und Millikan scheinen Anzeichen zu geben, daß sie keine unendlich große Frequenz besitzen“.

Die Existenz einer oberen Grenzdichte folgt auch aus der von Ambarzumian und Iwanenko entwickelten Theorie der Quantelung des Raumes. Nach dieser Theorie stellt der Raum ein Punktgitter dar, wobei die Elektronen nur in den Gitterpunkten sich befinden können, nicht aber dazwischen. „Aus unseren Annahmen folgt unmittelbar die Existenz einer maximalen Packung des Raumes durch die Elektronen. Vorläufig sind wir dazu gezwungen, auch für die Protonen dasselbe Punktgitter anzunehmen“¹⁾. An einer weiteren Stelle heisst es: „Es entsteht natürlich die Frage, ob die Zeit auch gequantelt sein soll. Die Antwort scheint notwendig positiv zu lauten. Ganz abgesehen von der notwendigen Symmetrie, legt die Existenz einer minimalen Entfernung auch die Annahme einer minimalen Wellenlänge nahe, sowohl für das Licht als auch für die Materie; und somit kommen wir zur Existenz einer maximalen Frequenz“²⁾.

Kritik der in der Literatur geäußerten Ansichten.

Wir beginnen mit Pokrowski. Sein Hauptargument beruht darauf, daß der Bau der Atomkerne dem des klassischen Elektrons ähnele, so daß der Kernradius nach der Formel $r = \frac{2 e^2}{3 m c^2}$ berechnet werden könne. Die Diskrepanz zwischen dem so berechneten und dem beobachteten Radius deutet Pokrowski als Anzeichen dafür, daß die Dichte im Kern ihren oberen Grenzwert bereits erreicht habe. Nun wissen wir heutzutage, daß von einem derartigen „klassischen“ Aufbau der Atomkerne überhaupt keine Rede sein kann, also auch keine Rede von irgendwelcher Diskrepanz im oben erwähnten Sinne. Somit hängen alle darauf fußenden Berechnungen der maximalen Frequenz in der Luft. Auch wird man kaum Pokrowskis Ansicht zustimmen können, daß bei $3 \cdot 10^{12}$ Grad die materiellen Teilchen „sich sozu-

1) V. Ambarzumian und D. Iwanenko, ZS. f. Phys. **64**, 565, 1930.

2) Ebenda, S. 567.

sagen auflösen“ in der umgebenden Hohlraumstrahlung, und daß dadurch eine noch höhere Temperatur unmöglich werde. Die Hohlraumstrahlung stellt ja nicht etwas absolut Kontinuierliches dar, sondern eine Ansammlung von Energiequanten $h\nu$, deren durchschnittliche (kinetische) Masse proportional der Temperatur steigt. Auch die materiellen Teilchen werden einen mit der Temperatur steigenden Massenzuwachs erhalten. Es ist daher gar nicht einzusehen, warum $3 \cdot 10^{12}$ Grad die obere Temperaturgrenze darstellen soll. Aber selbst wenn wir annehmen, daß bei einer gewissen Temperatur jeder Unterschied zwischen Materie und Hohlraumstrahlung verschwindet, warum soll dadurch eine noch höhere Temperatur unmöglich geworden sein? — Wenn wir z. B. eine Flüssigkeit mit ihrem Dampf bis zur kritischen Temperatur erwärmen, so verschwindet jeder Unterschied zwischen Flüssigkeit und Dampf. Aber dies bedeutet noch lange nicht, daß dadurch eine höhere Temperatur unmöglich geworden sei! — Die obere Grenze von ν berechnet Pokrowski u. a. auch auf Grund des sog. „Zeitatomismus“, dessen Richtigkeit er durch Millikans und Camerons Wellenmessungen der Höhenstrahlung bestätigt zu finden glaubt. Nun dominiert heutzutage die Ansicht, daß die Höhenstrahlung in der Hauptsache gar keine Wellenstrahlung, sondern eine Korpuskularstrahlung ist: „Daß ein großer Teil der primären Ultrastrahlung korpuskularer Natur ist, darüber hat der sogen. „Breiteneffekt der Ultrastrahlung“ Aufschluß gegeben, die Tatsache, daß am Äquator etwa 12 bis 14%, weniger Ultrastrahlungsintensität beobachtet wird als in höheren nördlichen und südlichen Breiten. Das kann nur dadurch zustande kommen, daß die aus dem Weltenraum kommende korpuskuläre Ultrastrahlung nach den Polen abgelenkt wird, wenn sie sich dem Magnetfeld der Erde nähert“¹⁾. Eine Theorie, die auf den „gemessenen“ Wellenlängen der Ultrastrahlung basieren will, ist daher mehr als gewagt. Übrigens ist Pokrowski in seinen Schlußfolgerungen sehr vorsichtig, indem er erklärt: „Alles hier Gesagte erlaubt somit den Schluß zu ziehen, daß, wenn auch keine bestimmte Grenze für die Energiedichte existiert, doch das Auftreten von Energiedichten größer als 10^{13} g/cm³ äußerst unwahrscheinlich ist“²⁾.

1) E. Regener, „Neues von der Ultrastrahlung“, Umschau **39**, 993, 1935.

2) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **51**, 736, 1928.

Gegen eine so formulierte Schlußfolgerung läßt sich wohl kaum etwas einwenden.

Was Suzuki anbetrifft, so sind seine Hauptargumente für die Existenz einer oberen Grenzdichte folgende:

1) das Auftreten einer oberen oder unteren Grenze in vielen anderen Fällen (z. B. der absolute Nullpunkt der Temperatur, die obere Grenzgesehwindigkeit c u. s. w.);

2) das Nichtauftreten beliebig großer Energiequanten (resp. kinetischer Energien der Korpuskel) in der Höhenstrahlung;

3) das Gedankenexperiment (vom klassischen Standpunkt aus) mit den für absolut inkompressibel gehaltenen Elektronen und Protonen.

Als eine Art „Gegenleistung“ für seine drei Argumente verlangt Suzuki eine „kleine“ (?) Abänderung der Relativitätstheorie, der Lorentz-Transformation, des Compton-Effekts... Ist dies aber nicht ein etwas zu hoher Preis für Suzukis „drei Argumente“? — Das erste dieser Argumente darf wohl kaum als übermäßig zwingend angesehen werden. Was das zweite Argument anbetrifft, d. h. das Nichtauftreten beliebig großer Energiequanten, so beweist es noch nicht die prinzipielle Unmöglichkeit solcher Energiequanten. Es kann ja sein, daß bloß die dazu notwendigen Bedingungen in dem Weltenraume fehlen. So z. B. werden wir auf unserer Erdoberfläche nirgends eine Temperatur von 10 Millionen Grad finden. Dies bedeutet aber doch nicht etwa die prinzipielle Unmöglichkeit einer solchen Temperatur, sondern bloß das Fehlen der dazu notwendigen Bedingungen auf der Erdoberfläche. Was schließlich das dritte Argument anbetrifft, so beruht dies auf der Annahme, daß die Elektronen und Protonen absolut inkompressible Körper von bestimmten Dimensionen seien. Diese Annahme ist nach Suzukis Meinung eine Selbstverständlichkeit, die weder eines Beweises, noch irgendwelcher Begründung bedürfe (genau so, wie vor 15 Jahren die Atome als „selbstverständlich“ inkompressibel angesehen wurden). Eine gewisse Entschuldigung für eine solche Annahme kann man vielleicht darin erblicken, daß die Kompression eines kontinuierlichen Gebildes, wie das Elektron, der menschlichen Vorstellungskraft größere Schwierigkeiten bietet, als die Kompression eines aus mehr oder weniger weit voneinander getrennten Partikelchen bestehenden diskontinuierlichen Gebildes. Ich muß jedoch auf das Licht-

quant hinweisen, dem man eine kontinuierliche Struktur genau mit demselben Recht zuschreiben kann, wie dem Elektron (heutzutage wird wohl kaum jemand daran glauben, daß das Lichtquant aus einer Wolke getrennter ultrakleiner Partikelchen bestehe). Trotzdem benimmt sich ein solches kontinuierliches Gebilde nicht wie ein absolut starrer Körper, sondern läßt sich beim Dopplereffekt verkürzen oder verlängern. Wir sehen also, daß eine kontinuierliche Struktur an sich noch kein genügender Grund für die Inkompressibilität ist.

In einem früheren Aufsatz habe ich die Frage über die Kompressibilität des klassischen Elektrons untersucht, dessen Radius gleich

$$r = a \frac{e^2}{mc^2} \quad (1)$$

ist, wo der Zahlenfaktor a von der Verteilung der Elektrizität im Elektron abhängt. Diese Untersuchung hat nun gezeigt, daß der Widerstand eines solchen klassischen Elektrons gegen äußeren Druck überwunden wird, sobald letzterer den Wert

$$p = \frac{m^4 c^8}{4 \pi a^3 e^6} \quad (2)$$

erreicht¹⁾. Andererseits ist die Dichte im Elektron (da $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho$ ist) gleich

$$\varrho = \frac{3m}{4 \pi r^3}. \quad (3)$$

Aus (1) und (3) ergibt sich:

$$\varrho = \frac{3 m^4 c^6}{4 \pi a^3 e^6}; \quad (4)$$

aus (2) und (4):

$$p = \frac{\varrho c^2}{3}, \quad (5)$$

also genau dieselbe Gleichung wie für die Hohlraumstrahlung. Wenn $a = \frac{2}{3}$ ist, so ergibt sich $\varrho = 3,26 \cdot 10^{10} \text{ g.cm}^{-3}$ und $p = 9,76 \cdot 10^{30} \text{ Dyn.cm}^{-2}$. Damit sich nun das Elektron nicht unbegrenzt ausdehne, ist man gezwungen die Existenz einer besonderen Kraft anzunehmen (und dies ist ein schwerwiegender Vor-

1) ZS. f. Phys. 56, 855, 1929.

wurf, den man der klassischen Elektronentheorie machen kann), die einem äußeren Druck von $9,76 \cdot 10^{30}$ Dyn.cm⁻² äquivalent wäre. Jedenfalls kann die Widerstandskraft des klassischen Elektrons gegen äußeren Druck nicht größer als $\frac{Q c^2}{3}$ sein, also nicht größer als die Widerstandskraft der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte.

Man kann natürlich einwenden, daß das klassische Elektron nicht der Wirklichkeit entspreche, sondern von letzterer mehr oder weniger abweiche. Dies muß natürlich zugegeben werden, gleichzeitig muß aber auch vor etwa folgendem Gedankengang gewarnt werden:

„Das klassische Elektron ist kompressibel.

Das wirkliche Elektron ist nicht das klassische.

Folglich ist das wirkliche Elektron inkompressibel“.

Dies wäre genau dasselbe, wie wenn jemand sagen wollte:

„Die Europäer sind sterblich.

Die Neger sind keine Europäer.

Folglich sind die Neger unsterblich“.

Neuerdings haben Born und Infeld eine neue Elektronentheorie aufgestellt, wobei sie nicht von der gewöhnlichen Gleichung

$$L = \frac{1}{2} (H^2 - E^2)$$

ausgingen, sondern von einer erweiterten:

$$L = b^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} (H^2 - E^2)} - 1 \right).$$

Hier bedeutet E den elektrischen Vektor, H den magnetischen, L die Funktion von Lagrange, und b stellt die obere Grenze des elektrischen Feldes dar ¹⁾. Diese obere Grenze bestimmen Born und Infeld zu $b = 9,18 \cdot 10^{15}$ e. s. u. „The enormous magnitude of this field justifies the application of the Maxwell's equations in their classical form in all cases, except those where the inner structure of the electron is concerned“ ²⁾. Wenn nun das elektrostatische Feld eine obere Grenze hat, so kann die elektrostatische Abstoßungskraft zweier gleichnamiger Elektrizitätsmengen bei fort-

1) M. Born und L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London (A) **144**, 427, 1934.

2) Ebenda, S. 446 f.

dauernder Annäherung nicht unbegrenzt wachsen, sondern muß eine obere Grenze haben. Übersteigt die äußere Kraft diese obere Widerstandsgrenze, so können die gleichnamigen Elektrizitätsmengen beliebig nahe aneinander gebracht werden. Dies könnte nur verhindert werden durch das Auftreten hypothetischer Kräfte, die also nicht elektromagnetischer Natur wären. Born und Infeld wollen jedoch die Existenz solcher Kräfte nicht anerkennen, und weisen darauf hin, daß die Theorien von Heaviside, Searle, J. J. Thomson, Abraham und Lorentz gerade deshalb zusammengebrochen sind, weil sie die Existenz einer nichtelektromagnetischen Kraft anzunehmen gezwungen waren: „... they break down because they are compelled to introduce cohesive forces of non-electromagnetic origin“ ¹⁾. Hinsichtlich der Elektrizitätsverteilung bei ihrem Elektron sagen Born und Infeld: „... the true charge can be considered as concentrated in a point, but it is also possible to introduce a free charge with a spatial distribution law“ ²⁾.

Dies alles spricht nicht zugunsten einer Inkompressibilität der Elektronen. Jedenfalls kann man es nicht als bewiesene und abgemachte Tatsache betrachten, daß die Elektronen absolut starre Körper von bestimmten Dimensionen seien.

Aber selbst wenn wir letzteres auch annehmen, so wird das Endstadium in Suzukis Gedankenexperiment kein Gebilde von endlicher Dichte sein, wie er es glaubt. Wir wollen die Gleichung $p = \frac{\Re T}{v - b}$ benutzen, wo b das sogen. „Kovolumen“

bedeutet. Das Kovolumen ist keine absolut konstante Größe, sondern nimmt bei sehr hohen Drucken merklich ab, indem es gegen den Grenzwert b_1 konvergiert, welcher jenem Zustand entspricht, wo die Partikelchen in maximaler Packung einander schon berühren. Wir können also schreiben: $b_1 \leq b$, und daher:

$p \geq \frac{\Re T}{v - b_1}$. Es möge T_a die Anfangstemperatur bedeuten und v_a das Anfangsvolumen. Bei einer adiabaten Kompression muß T steigen, so daß die Anfangstemperatur T_a den kleinsten Wert von T darstellt. Die zur Kompression von $v = v_a$ bis $v = b_1$ (d.

1) Ebenda, S. 425.

2) Ebenda, S. 451.

h. bis zur gegenseitigen Berührung der Partikelchen) notwendige Arbeit ist gleich

$$\int_{b_1}^{v_a} p dv \geq \int_{b_1}^{v_a} \Re \frac{T dv}{v - b_1} > \int_{b_1}^{v_a} \Re \frac{T_a dv}{v - b_1} = \Re T_a \log \text{nat} (v - b_1) \Big|_{b_1}^{v_a} = \infty.$$

Wir haben durch unsere adiabate Kompression dem Gase eine unendlich große Energiemenge zugeführt; somit erhalten wir im Endstadium keine endliche Dichte, wie es Suzuki glaubt, sondern eine unendlich große.

Wenden wir uns jetzt der Raumquantelung von Ambarzumian und Iwanenko zu. Wenn ein Raum sein Maximum an Elektronen und Protonen erhalten hat, so muß der Versuch ein neues Elektron einzuführen offenbar auf Widerstand seitens der Quantenstruktur des Raumes stoßen. Wo ist aber der Beweis, daß dieser Widerstand unendlich groß werden kann? — Früher hatte man ja auch geglaubt, daß die Quantenstruktur eines Atoms imstande sei einem unendlich großen äußeren Druck zu widerstehen; später hat sich diese Ansicht als irrig erwiesen. Wo ist der Beweis, daß Ambarzumians und Iwanenkos Quantenstruktur des Raumes nicht ebenfalls unter genügendem äußerem Druck zusammenbrechen wird? — Aber selbst wenn diese Struktur absolut fest wäre, so kann man doch den Elektronen „Molekulargeschwindigkeiten“ erteilen, welche nach der Relativitätstheorie beliebig nahe an c heranreichen können. Dadurch können wir im „Raume mit maximaler Packung“ beliebig hohe Dichten realisieren.

Auf Grund alles Gesagten glaube ich schließen zu dürfen, daß es bis jetzt noch niemandem gelungen ist, die Existenz einer oberen Grenzdichte zu beweisen.

Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie?

Suzuki gibt auf diese Frage eine negative Antwort (s. oben) und verlangt, daß zur Rettung der Existenz einer oberen Grenzdichte die Relativitätstheorie „etwas“ abgeändert werde. Mir scheint ein solches Verlangen kühn und seine Notwendigkeit nicht genügend motiviert zu sein. Auch führen die von Suzuki vorgeschlagenen Abänderungen der (speziellen) Relativitäts-

theorie zu großen Schwierigkeiten. Suzuki setzt die maximale mögliche Geschwindigkeit eines materiellen Körpers nicht gleich c , sondern gleich V_m , wo $V_m < c$ ist. Dabei setzt er jedoch voraus, daß die kinetische Energie eines mit der Geschwindigkeit V_m bewegten Körpers endlich sei! Was wird aber nun geschehen, wenn dieser Körper von hinten von einem Lichtstrahl getroffen wird? — Da die Differenz zwischen der Lichtgeschwindigkeit c und der Körpergeschwindigkeit V_m nach Suzuki eine endliche ist, so wird der Körper jede Sekunde einen endlichen Impuls in der Bewegungsrichtung erhalten und seine kinetische Energie einen endlichen Zuwachs. Da bei V_m die Masse des Körpers endlich ist, so muß auch der Geschwindigkeitszuwachs endlich sein. Dies widerspricht aber Suzukis Annahme, daß V_m die maximale mögliche Geschwindigkeit eines materiellen Körpers darstelle. Will man jedoch seine Annahme fallen lassen, so ist man dadurch gezwungen, auch die Hypothese einer oberen Grenzdichte aufzugeben. Und in der Tat: wenn die Körpergeschwindigkeit beliebig nahe an c heranreichen, also die kinetische Energie beliebig groß werden kann, so können beim Zusammenstoß zweier solcher Körper beliebig große Energiemengen in engem Raume konzentriert, also auch beliebig hohe Dichten erzielt werden.

Die Existenz einer oberen Grenzdichte müßte auch die Existenz einer oberen Grenze für die Temperatur (T_m) und für die Schwingungsfrequenz (ν_m) bedingen. Letzteres führt aber zu einem hoffnungslosen Konflikt mit dem Doppler-Effekt. Wenn wir Einsteins Formel für den Doppler-Effekt¹⁾ auf ν_m anwenden, so erhalten wir:

$$\nu'_m = \nu_m \frac{1 - \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Für $\varphi = 0$ ergibt dies:

$$\nu'_m = \nu_m \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Bewegt sich der Körper so, daß v negativ gerechnet werden

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 17, 911, 1905.

muß, so ist $\nu'_m > \nu_m$, was aber der gemachten Annahme widerspricht, daß ν_m die maximale mögliche Frequenz darstelle.

Wenn ν_m die maximale mögliche Frequenz darstellt, so gibt es kein Strahlungsquant, dessen Energie größer als $h\nu_m$ wäre. Mögen nun solche maximale Quanten senkrecht auf einen idealen Spiegel fallen. Solange der Spiegel unbeweglich ist, muß die Energie sowohl jedes einfallenden als auch jedes reflektierten Quants gleich $h\nu_m$ sein. Bewegen wir aber den Spiegel gegen die Lichtquanten, so leisten wir Arbeit, da wir ja den Strahlungsdruck der einfallenden Quanten überwinden müssen. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt, daß die von uns geleistete Arbeit nicht spurlos verschwinde, sondern zur Vergrößerung der Energie der reflektierten Quanten verbraucht werde. Somit muß die Energie jedes reflektierten Quants größer als $h\nu_m$ sein, was aber nach unserer Annahme unmöglich ist, da ja $h\nu_m$ die maximale mögliche Energie eines Quants darstellt.

Nicht nur ein absolut inkompressibler, sondern sogar ein zu wenig kompressibler Körper widerspricht der (speziellen) Relativitätstheorie, da man in einem solchen Körper, wie wir unten sehen werden, Signale mit Überlichtgeschwindigkeit übermitteln könnte.

Wir denken uns einen Zylinder von der Länge l cm, der innen vollkommen spiegelt und mit einem verschiebbaren Stempel versehen ist. Wenn sich im Zylinder Hohlraumstrahlung von der Massendichte ϱ g.cm⁻³ befindet, so erfahren die Wände des Zylinders, und also auch der verschiebbare Stempel, einen Druck von $\frac{\varrho c^2}{3}$ Dyn. cm⁻². Sollten die Bewegungen der Lichtquanten nicht ungeordnet sein, wie dies bei der Hohlraumstrahlung der Fall ist, sondern ausschließlich parallel zur Achse des Zylinders, also senkrecht zum Stempel, stattfinden, so erfährt bekanntlich letzterer einen dreimal größeren Druck als früher, d. h. $p = \frac{3\varrho c^2}{3} = \varrho c^2$ Dyn. cm⁻². Damit der Stempel sich dabei nicht verschiebe, muß der auf ihm lastende äußere Druck ebenfalls $p = \varrho c^2$ betragen. Der Druck der „gerichteten“ strahlenden Energie auf die Seitenwände des Zylinders hingegen wird jetzt gleich Null sein, so daß man diese Seitenwände sogar entfernen kann. Erhöht man den äußeren Druck um dp , so verschiebt sich der Stempel nach innen, so daß die Länge l sich

um $|dl|$ verkürzt, was eine Steigerung der Dichte ϱ um $d\varrho$ zur Folge haben muß (wir schreiben $|dl|$, da dl in unserem Falle negativ ist). Der Druck auf die Seitenwände bleibt dabei unverändert gleich Null. Da bei der Verschiebung des Stempels der Querschnitt des Zylinders unverändert bleibt, so ist das innere Volumen des letzteren offenbar proportional seiner Achsenlänge l . Bei der Stempelverschiebung leisten die äußeren Druckkräfte Arbeit, wodurch Energie und Masse der im Zylinder befindlichen Strahlung vergrößert wird. Zur Vermeidung dieser unbequemen Komplikation soll angenommen werden, daß der Stempel etwas Energie hindurchläßt, und zwar gerade so viel, daß die hinzugekommene Energie wieder entfernt wird. Da in einem solchen Falle die im Zylinder eingeschlossene Masse konstant bleibt, so muß sich die Dichte ϱ umgekehrt proportional dem Volumen ändern, also auch umgekehrt proportional der Achsenlänge l . Wir haben also:

$$\frac{\varrho}{\varrho + d\varrho} = \frac{l + dl}{l},$$

oder:

$$ld\varrho + \varrho dl = 0. \quad (6)$$

Der „Elastizitätsmodul“ wird definiert durch

$$E = -\frac{l dp}{dl}. \quad (7)$$

Da in unserem Falle die Länge proportional dem Volumen ist, so besteht zwischen dem „Elastizitätsmodul“ und dem räumlichen „Kompressibilitätsmodul“ kein Unterschied. In unserem Falle ist $p = \varrho c^2$, also $dp = c^2 d\varrho$. Führt man diesen Wert in (7) ein, so erhält man im Hinblick auf (6):

$$E = -\frac{lc^2 d\varrho}{dl} = -\frac{c^2 (-\varrho dl)}{dl} = \varrho c^2. \quad (8)$$

Der für eine konstante Masse der (einseitig gerichteten) Strahlung abgeleitete Elastizitätsmodul ist also gleich dem Strahlungsdruck. Im Falle von Hohlraumstrahlung ist der räumliche Kompressibilitätsmodul offenbar gleich

$$E = \frac{\varrho c^2}{3}, \quad (9)$$

also wiederum gleich dem entsprechenden Strahlungsdruck.

Von allen bekannten flüssigen oder festen Körpern ist Dia-

mant am wenigsten kompressibel: sein räumlicher Kompressibilitätskoeffizient beträgt nur $(0,16 \pm 0,02) \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2 \cdot \text{kg}^{-1}$, wenn man das Druckintervall zwischen 4000 und 10000 kg. cm^{-2} ins Auge faßt¹⁾. Der räumliche Kompressibilitätsmodul des Diamanten ist also gleich

$$E = \frac{1}{0,16 \cdot 10^{-6}} = 6 \cdot 10^6 \text{ kg. cm}^{-2} = 6 \cdot 10^{12} \text{ Dyn. cm}^{-2}.$$

Die Dichte des Diamanten beträgt $3,5 \text{ g. cm}^{-3}$. Der Kompressibilitätsmodul der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte ist nach (9) gleich

$$E = \frac{3,5 \cdot 9 \cdot 10^{20}}{3} = 1,05 \cdot 10^{21} \text{ Dyn. cm}^{-2}.$$

Die Widerstandskraft des Diamanten gegen äußeren Druck ist also $1,75 \cdot 10^8$ mal kleiner als die Widerstandskraft der Hohlraumstrahlung von gleicher Dichte!

Der von uns benutzte Wert des Kompressibilitätskoeffizienten des Diamanten bezieht sich nur auf geringere Drucke als 10000 kg. cm^{-2} . Nun ist es eine bekannte Tatsache, daß mit zunehmendem Druck der räumliche Kompressibilitätskoeffizient abnimmt, also der Kompressibilitätsmodul steigt. Wie lange kann aber dieses Steigen bei immer weiter zunehmendem Druck andauern, und existiert überhaupt eine obere Grenze für den räumlichen Kompressibilitätsmodul eines Körpers? — Zur Untersuchung dieser wichtigen Frage gehen wir nun über.

Es möge sich in dem oben erwähnten Zylinder statt strahlender Energie irgendein anderer Körper befinden, wobei auf dem verschiebbaren Stempel der äußere Druck p lastet. Es mögen außerdem alle inneren abstoßenden Kräfte des Körpers senkrecht zum Stempel gerichtet sein, wodurch die Widerstandskraft des Körpers in dieser Richtung (auf Kosten anderer Richtungen) gegen eine Stempelverschiebung nach innen noch verdreifacht wird (wie dies bei der „gerichteten“ Strahlung gegenüber der Hohlraumstrahlung der Fall ist). Vergrößern wir den äußeren Druck p um dp , so kann diese Druckveränderung nicht absolut plötzlich an allen Punkten unseres (ideal anisotropen) Körpers wahrnehmbar werden, weil wir sonst imstande wären Signale von unendlicher Geschwindigkeit zu übermitteln (was mit der speziellen Relativitätstheorie unvereinbar wäre). Die

1) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, 5. Auflage, 1. Ergänzungsband, S. 24, Berlin 1927.

Druckänderung wird sich also mit einer endlichen Geschwindigkeit ausbreiten, welche nicht größer sein darf als die Grenzgeschwindigkeit c . Wenn wir also den Druck um dp erhöhen, so pflanzt sich diese Druckänderung erst nach τ Sekunden bis zum entgegengesetzten Ende des Zylinders fort. Dabei verlangt die Relativitätstheorie, daß die Bedingung

$$\tau \geq \frac{l}{c} \quad (10)$$

erfüllt sei. Den inneren Querschnitt des Zylinders nehmen wir der Einfachheit halber gleich 1 cm^2 an. Dann beträgt die im Zylinder eingeschlossene Masse lq . Seitens des Stempels wirkt auf diese Masse τ Sekunden lang der Druck $p + dp$, während der auf die entgegengesetzte Seite wirkende nur p beträgt (da erst im letzten Moment der Zeitspanne τ die Druckerhöhung dp das Ende des Zylinders erreicht). Somit erfährt die Masse lq während τ Sekunden den einseitigen Nettodruck dp , wodurch der Schwerpunkt dieser Masse die Geschwindigkeit v erhält. Nach einem Grundgesetz der Mechanik besteht in diesem Falle die Gleichung

$$\tau dp = q lv. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) erhalten wir:

$$\frac{dp}{q} \leq v c. \quad (12)$$

Wir wollen voraussetzen, daß $\frac{dp}{q}$ immer sehr klein bleibt. Dann bleibt auch v sehr klein, so daß wir den relativistischen Massenzuwachs vernachlässigen können. [Natürlich darf die kleine Geschwindigkeit v nicht mit jener großen Geschwindigkeit verwechselt werden, mit der sich die Druckänderung dp im Zylinder fortpflanzt; in ähnlicher Weise ist die lineare Geschwindigkeit eines in der Luft vibrierenden Körpers durchaus nicht identisch mit der Schallgeschwindigkeit: letztere ist ja konstant, während erstere bei verschiedenen vibrierenden Körpern eine sehr verschiedene sein kann; sogar ein ganz langsames Hin- und Herbewegen der Hand erzeugt Schallwellen (freilich unhörbare), die sich mit der gewöhnlichen Schallgeschwindigkeit fortpflanzen. Beim Passieren einer Schallwelle vibrieren die Luftmoleküle, wobei ihre linearen Geschwindigkeiten veränderlich in Richtung und Größe, und abhängig von der Amplitude (also von der Stärke des Schalls) sind. Die Schallgeschwindigkeit hin-

gegen ist konstant und gewöhnlich sehr viel größer.] Da der von dem Stempel entfernteste Teil der im Zylinder befindlichen Masse am Ende der τ Sekunden immer noch ruht, obgleich der Schwerpunkt (also das Zentrum der Masse) schon die Geschwindigkeit v erhalten hat, so sind wir gezwungen anzunehmen, daß das andere Ende der im Zylinder befindlichen Masse (also welches den Stempel unmittelbar berührt) bereits die Geschwindigkeit $2v$ besitzt. Somit steigt die Geschwindigkeit des Stempels im Verlauf von τ Sekunden (wir setzen voraus: gleichmäßig) von 0 bis $2v$, also kann seine durchschnittliche Geschwindigkeit gleich v angenommen werden. Der vom Stempel dabeizurückgelegte Weg ist gleich $|dl|$, so daß wir schreiben können:

$$- dl = v\tau. \quad (13)$$

Aus (7) und (13) ergibt sich:

$$E = \frac{ldp}{v\tau}, \quad (14)$$

und aus (10), (12) und (14):

$$E \leq \varrho c^2. \quad (15)$$

Sollten die inneren Widerstandskräfte des Körpers nicht nach einer bestimmten, sondern nach allen Seiten gleichmäßig gerichtet sein (ideal isotroper Körper), so haben wir offenbar:

$$E \leq \frac{\varrho c^2}{3}. \quad (16)$$

Bei einem absolut inkompressiblen Körper müßte $E = \infty$ sein, doch nach (15) und (16) kann dies bei endlichem ϱ niemals stattfinden. Der Vergleich von (15) und (16) mit (8) und (9) zeigt, daß die obere Grenze für die Widerstandskraft eines beliebigen Körpers gegen äußeren Druck zusammenfällt mit der Widerstandskraft strahlender Energie von gleicher Massendichte.

Die (spezielle) Relativitätstheorie verlangt also die Existenz einer oberen Grenze des Elastizitätsmoduls für jeden Körper. Dies Resultat steht im schärfsten Widerspruch mit den bis jetzt geäußerten Ansichten. Nicht die Dichte, sondern ganz im Gegenteil: die Widerstandskraft eines jeden Körpers gegen äußeren Druck hat eine obere Grenze. Kein Körper (isotrop oder anisotrop) von der Dichte ϱ kann in irgendeiner Richtung einem äußeren Druck widerstehen, der größer als ϱc^2 ist. Das oben erwähnte Beispiel mit dem Diamanten zeigt, daß die Widerstandskraft selbst der festesten gewöhnlichen Körper mehr als 10^8 mal kleiner ist.

J. von Neumanns Ansicht, daß $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ die extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie ist. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Ansicht.

Neuerdings schreibt Chandrasekhar: „Finally, it is necessary to point out in this connection that J. von Neumann has recently shown that the *very* ultimate equation of state for matter should *always* be

$$P = \frac{1}{3} c^2 \rho.$$

The consideration of this new equation of state does not, however, introduce any essential modifications in our present scheme“¹⁾.

Es ist sehr zu bedauern, daß Chandrasekhar kein genaues Zitat anführt. Bis jetzt habe ich mich vergeblich bemüht festzustellen, wo Neumanns Aufsatz erschienen ist.

Also Neumann ist der Ansicht, daß $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ die ultra-extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie darstellt. Mit anderen Worten: Neumann meint, daß im allerextremsten Falle jede Materie sich (in Hinsicht des Druckes) wie Hohlraumstrahlung benimmt. Eine solche Ansicht ist aber gar nicht neu, denn ich habe sie schon seit Jahren viele Mal an verschiedenen Stellen geäußert.

„Unsere beiden Tabellen zeigen, daß bei genügend großem n Lichtquantengas denselben Druck, dieselbe Dichte... aufweist, wie Elektronengas und Protonengas, also auch wie ein Gemisch der beiden letzteren... Nun besteht jede gewöhnliche Materie letzten Endes aus Elektronen und Protonen. Wir kommen also zu dem Schluß, daß unter genügend großem Druck selbst beim absoluten Nullpunkt gewöhnliche Materie und Hohlraumstrahlung (Lichtquantengas) in jeder Hinsicht identisch werden. Die Elektronen und Protonen sind nicht zu unterscheiden von Lichtquanten, der Gasdruck nicht vom Strahlungsdruck“²⁾.

„Zum Schluß will ich noch auf die alles „nivellierende“ Eigenschaft des hohen Druckes hinweisen. Es ist z. B. längst bekannt, daß beim „kritischen“ Drucke der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Gas verschwindet. Unter genügendem

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **95**, 693, 1935.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 441, 1929.

Drucke verschwindet auch der Unterschied zwischen ionisiertem und unionisiertem Zustande, wie ich es vor kurzem gezeigt habe. Unter extremen Drucken verschwindet jeder Unterschied zwischen gewöhnlicher Materie und Hohlraumstrahlung. Unter einem Druck von $6,56 \cdot 10^{48}$ Dyn. cm⁻² haben Elektronen und Protonen gleiche Volumina und gleiche Massen... Genügender Druck nivelliert alles¹⁾.

Damals (im Jahre 1929) war ich selbstverständlich der Meinung, daß sämtliche Materie nur aus Protonen und Elektronen aufgebaut sei, und rechnete auch nur mit dem „klassischen“ Modell der letzteren. Auch betrachtete ich die Lichtquanten als einfache Gebilde. Etwas später ließ ich diese Ansicht fallen und betrachtete das Lichtquant als aus einem positiven und einem negativen „Baustein“ bestehend. Ich kam nun zu dem Schluß, daß bei einer gewissen „kritischen“ Temperatur die negativen „Bausteine“ mit den gewöhnlichen Elektronen identisch werden, und die positiven mit den Protonen (die Positronen waren damals noch nicht entdeckt). „Dies bedeutet, daß bei einer gewissen Temperatur jeder Unterschied zwischen gewöhnlicher Materie und Hohlraumstrahlung verschwinden muß. Wir wollen diese „kritische“ Temperatur durch T_{krit} bezeichnen, den entsprechenden „kritischen“ Druck durch p_{krit} und die „kritische“ Dichte durch ϱ_{krit} “²⁾.

Anfänglich glaubte ich dabei, daß die Dichte der Materie dennoch eine obere Grenze haben müsse³⁾, d. h. daß die Gleichung $p = \frac{1}{3} \varrho c^2$ schließlich versagen würde. In einem etwas später erschienenen Artikel⁴⁾ habe ich aber eine solche Beschränkung der Gleichung $p = \frac{1}{3} \varrho c^2$ fallen lassen, indem ich auf sehr elementare Weise zeigte, daß der Kompressibilitätskoeffizient einer jeden Materie (den ich durch $\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dp}$ definierte) niemals kleiner als $\frac{1}{\varrho c^2}$ werden kann, daß also, mit anderen Worten, die Bedingung

1) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **59**, 714, 1930.

3) W. Anderson, ZS. f. Phys. **56**, 856, 1929.

4) W. Anderson, Phil. Mag. (7) **12**, 832 f., 1931.

$$\frac{1}{q} \frac{dq}{dp} \leq \frac{1}{q c^2}$$

immer erfüllt sein muß. Die Integration dieser Bedingung ergibt aber

$$p \leq q c^2.$$

Der extreme Fall ($p = q c^2$) stellt jedoch offenbar nicht die Zustandsgleichung der Hohlraumstrahlung dar (ideal isotroper Körper), sondern den maximalen möglichen Druck eines ideal anisotropen Körpers (z. B. den Druck eines parallelen Strahlenbündels senkrecht zur Einfallsebene). Im isotropen Falle (Hohlraumstrahlung) ist der Druck 3 mal kleiner, worauf ich schon in jenem Artikel hingewiesen habe.

Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie? — Untersuchungen von K. Schwarzschild und N. R. Sen.

Wir haben gesehen, daß die Widerstandskraft eines jeden Körpers gegen äußeren Druck eine obere Grenze hat. Durch genügenden Druck können wir jeden Körper bis zu jeder beliebigen Dichte zusammenpressen. Nun taucht aber die Frage auf, ob sich in unserer Welt jeder beliebige Druck auch realisieren lasse? — Treten nicht in extremen Fällen neue Faktoren auf, die ein unbegrenztes Steigen des Druckes unmöglich machen? — In diesem Falle müßte die Dichte tatsächlich eine obere Grenze haben, freilich in einem ganz anderen Sinne, als wir es bis jetzt gemeint haben. Nicht die Inkompressibilität der Materie würde die Existenz einer oberen Grenzdichte bedingen, sondern die Unmöglichkeit einen beliebig hohen Druck in unserer Welt zu realisieren. Solange jedoch das negative Gravitationspotential noch klein im Vergleich mit c^2 ist, treten solche neue Faktoren nicht auf. Anders wird die Sache, wenn wir hinsichtlich des Gravitationspotentials keine begrenzenden Voraussetzungen machen.

Schwarzschild untersucht den Fall einer inkompressiblen homogenen Flüssigkeitskugel nach den Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie¹⁾. Die Homogenität der Kugel wird durch Schwarzschild als Konstanz der Komponente T_4^4 des „gemischten Energietensors“ definiert. Es stellt sich heraus, daß im Innern

1) K. Schwarzschild, Berliner Ber. 1916, S. 424.

der Kugel die Geometrie des nichteuklidischen „sphärischen“ Raumes herrscht, und daß man zwischen dem „innen gemessenen“ und dem „außen gemessenen“ Radius zu unterscheiden hat. Weiter stellt es sich heraus, daß für das Volumen einer Kugel von gegebener Masse eine untere (also für die Dichte eine obere) Grenze existiert. Z. B. für die Masse der Sonne könnte der „außen gemessene“ Radius niemals kleiner als 3 km (rund gerechnet) sein.

Neuerdings behandelt Sen dasselbe Problem¹⁾, doch definiert er die Homogenität etwas anders als Schwarzschild: „...it has been pointed out that, strictly speaking, the condition for incompressibility is the constancy of proper density, the scalar formed by the diagonal sum of T_k^i , rather than the constancy of T_4^4 , as taken by Schwarzschild“. Die hier in Frage kommenden Tensorkomponenten sind:

$$T_i^i = p \ (i = 1, 2, 3), \ T_k^i = 0 \ (i \neq k), \ T_4^4 = -\mu c^2,$$

wo μ die Dichte (in g.cm^{-3}) bedeutet. Weiter wird die Bedingung $c^2 \mu - 3p = c^2 \delta$ eingeführt, wo δ die „invariable“ Dichte (ebenfalls in g.cm^{-3}) bezeichnet²⁾. Was die Hauptergebnisse anbetrifft, so sagt Sen: „The results obtained are somewhat unexpected. There exists really for a given density a sphere of maximum radius as well as a sphere of maximum gravitational mass, these two spheres not being identical. Conversely, for a given radius and density there are two spheres of different masses and central pressures, of which one has a central pressure smaller than that of the one with maximum radius and the other greater“³⁾. Der maximale Radius kann aus der Gleichung

$$\sqrt{\delta} \cdot R_{\max} = 0,996 \cdot \frac{1}{c\kappa^{1/2}} = 0,23 \cdot 10^{14}$$

bestimmt werden⁴⁾. Hier ist unter κ nicht, wie gewöhnlich, $\frac{8\pi G}{c^2}$, sondern $\frac{8\pi G}{c^4}$ zu verstehen⁵⁾. Setzt man diesen Wert statt κ in die letzte Gleichung ein, so ergibt sich:

1) N. R. Sen, Monthly Not. R. A. S. **94**, 550, 1934.

2) Ebenda, S. 552.

3) Ebenda, S. 550.

4) Ebenda, S. 557.

5) Ebenda, S. 552.

$$R_{max} = \frac{0,498 c}{\sqrt{2 \pi G \delta}}. \quad (17)$$

Der zentrale Druck in einer inkompressiblen Kugel vom maximalen Radius läßt sich aus der Gleichung

$$p_0 = \delta \cdot 5,8 \cdot 10^{13} \text{ Atm.} \quad (18)$$

berechnen ¹⁾. Diese Gleichung zeigt, daß bei endlichem δ der maximale mögliche Druck ebenfalls endlich ist. Somit läßt sich mit einer inkompressiblen Flüssigkeit von gegebener (endlicher) Dichte kein beliebig hoher (hydrostatischer) Druck realisieren. Weiter stellt Sen die Gleichung

$$M_{max} \cdot \delta^{1/2} = 0,526 \frac{4 \pi}{c^3 \kappa^{1/2}} = 8,2 \cdot 10^{40}$$

auf ²⁾, die man auch so schreiben kann:

$$\delta = \frac{(0,526)^2}{16 \pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M_{max}^2}. \quad (19)$$

Man darf jedoch nicht denken, daß derartige Resultate nur bei Anwendung der Methoden der allgemeinen Relativitätstheorie zum Vorschein kommen. Wir werden gleich sehen, daß unser Problem auch elementaren Behandlungsmethoden zugänglich ist.

Elementare Behandlungsmethoden von G. I. Pokrowski, von A. Haas und von mir.

Pokrowski hat darauf hingewiesen, daß das negative Gravitationspotential an der Oberfläche eines Sternes den Wert c^2 nicht überschreiten darf. „Bei einem solchen Werte des Gravitationspotentials kann keine Energie die Oberfläche der Masse verlassen, denn die Masse jedes Energiequantums $\frac{h \nu}{c^2}$, mit diesem Potential multipliziert, ergibt die Energie $h \nu$ des Quantums... daß keine kompakte Masse die angezeigte Grenze übersteigt, deutet darauf hin, daß die Entstehung des kritischen Potentials unmöglich ist. Der Mechanismus aber, welcher die Massenbildung regelt, kann dadurch bisweilen noch nicht geklärt werden“ ³⁾. Pokrowskis Gedankengang läßt sich noch auf

1) Ebenda, S. 557.

2) Ebenda, S. 558. Im Original steht ein offener Druckfehler: δ statt $\delta^{1/2}$.

3) G. I. Pokrowski, ZS. f. Phys. **49**, 589, 1928.

folgende Weise illustrieren. Es sei $-\varphi$ das Gravitationspotential eines Ortes, wo sich ein materieller Körper mit der Ruhemasse m_0 befindet. Teilen wir diesem Körper die kinetische Energie E mit, welche gerade genügt, um den Körper in die Unendlichkeit zu entfernen (wo das Gravitationspotential gleich Null ist). Da die zugeführte Energie eine Masse von $\frac{E}{c^2} g$ repräsentiert, so ist jetzt die Gesamtmasse des Körpers $m = m_0 + \frac{E}{c^2}$. Die bei der Überführung in die Unendlichkeit geleistete Arbeit ist gleich $E = m\varphi = \left(m_0 + \frac{E}{c^2}\right)\varphi$, und dies ergibt $E = \frac{m_0 c^2 \varphi}{c^2 - \varphi}$. Bei kleinen Werten von φ geht diese Formel in $E = m_0 \varphi$ über, wie dies auch zu erwarten war. Ist aber $\varphi = c^2$, so erhalten wir $E = \infty$. Somit ist $-c^2$ der extremste Wert des Gravitationspotentials¹⁾. Nur wenn man die Möglichkeit von $m_0 < 0$ voraussetzt, könnte man auch $\varphi > c^2$ für möglich halten. Wir wollen jedoch die Möglichkeit von negativen Ruhemassen erst in einem späteren Abschnitt diskutieren.

Wir müssen konsequenterweise noch einen Schritt weiter als Pokrowski tun und verlangen, daß nicht nur an der Oberfläche, sondern auch an allen übrigen Punkten des Sternes, sogar im Zentrum, das (mit verkehrtem Zeichen genommene) Gravitationspotential den Grenzwert c^2 nicht überschreite.

An der Oberfläche ist das Gravitationspotential gleich $-\frac{GM}{R}$ und im Zentrum eines homogenen Sterns gleich $-\frac{3}{2} \frac{GM}{R}$. Nach dem Gesagten muß die Bedingung

$$\frac{3}{2} \frac{GM}{R} \leq c^2 \quad (20)$$

erfüllt sein. Andererseits ist

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho. \quad (21)$$

Das Eliminieren von R aus diesen beiden Gleichungen ergibt:

$$\varrho \leq \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (22)$$

1) Vgl. W. Anderson, ZS. f. Phys. **55**, 389 f., 1929. Das dort von mir geäußerte leichte Bedenken gegen Pokrowskis Ansichten hat letzterer in einem späteren Artikel (ZS. f. Phys. **58**, 700, 1929) widerlegt.

Diese Formel unterscheidet sich von (19) nur durch den Zahlenfaktor. Wir sehen also, daß auch vom Standpunkt von Pokrowskis elementarer Theorie die Dichte eines Sterns von gegebener Masse eine obere Grenze hat. Diese obere Grenze ist sonderbarerweise dem Quadrat der Masse umgekehrt proportional. Schon dies allein beweist, daß eine solche obere Grenze nicht durch Inkompressibilität der Materie bedingt sein kann, sondern ganz andere Ursachen haben muß. In der folgenden Tabelle sind nach (22) die maximalen Dichten für verschiedene Massen berechnet.

Tabelle 1.

| M | ϱ_{max} | M | ϱ_{max} |
|---------------------|---|----------------------|--------------------------------------|
| 10^{33} g | $1,74 \cdot 10^{17} \text{ g. cm}^{-3}$ | 10^{37} g | $1,74 \cdot 10^9 \text{ g. cm}^{-3}$ |
| $2 \cdot 10^{33}$ | $4,34 \cdot 10^{16}$ | 10^{38} | $1,74 \cdot 10^7$ |
| $3 \cdot 10^{33}$ | $1,93 \cdot 10^{16}$ | 10^{39} | $1,74 \cdot 10^5$ |
| $4 \cdot 10^{33}$ | $1,08 \cdot 10^{16}$ | 10^{40} | $1,74 \cdot 10^3$ |
| $5 \cdot 10^{33}$ | $6,94 \cdot 10^{15}$ | 10^{45} | $1,74 \cdot 10^{-7}$ |
| 10^{34} | $1,74 \cdot 10^{15}$ | 10^{50} | $1,74 \cdot 10^{-17}$ |
| $5 \cdot 10^{34}$ | $6,94 \cdot 10^{13}$ | 10^{55} | $1,74 \cdot 10^{-27}$ |
| 10^{35} | $1,74 \cdot 10^{13}$ | $2 \cdot 10^{55}$ | $4,34 \cdot 10^{-28}$ |
| 10^{36} | $1,74 \cdot 10^{11}$ | $4,17 \cdot 10^{56}$ | 10^{-30} |

Das Eliminieren von M aus (20) und (21) ergibt:

$$R \leq \frac{c}{\sqrt{2 \pi G \varrho}}, \quad (23)$$

was der Gleichung (17) analog ist. Somit hat der Radius eines Sterns von gegebener Dichte eine obere Grenze. Für eine Kugel aus Wasser ($\varrho = 1$) erhalten wir $R \leq 4,63 \cdot 10^{13} \text{ cm}$; für $\varrho = 10^{-30}$ ergibt sich $R \leq 4,63 \cdot 10^{28} \text{ cm}$.

Der Druck im Zentrum einer homogenen Kugel ist bekanntlich gleich

$$P_c = \frac{3}{8 \pi} \cdot \frac{G M^2}{R^4}. \quad (24)$$

Eliminiert man R und M aus (20), (21) und (24), so erhält man:

$$P_c \leq \frac{\varrho c^2}{3} = \varrho \cdot 3 \cdot 10^{20} \text{ Dyn. cm}^{-2} = \varrho \cdot 3 \cdot 10^{14} \text{ Atm.}, \quad (25)$$

was der Gleichung (18) analog ist. Somit kann man mit einer

inkompressiblen Flüssigkeit von der Dichte ϱ keinen hydrostatischen Druck realisieren, der größer als $\frac{\varrho c^2}{3}$ wäre.

Wir können (22) folgendermaßen umschreiben:

$$M \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \frac{c^3}{G^{3/2} \varrho^{1/2}}. \quad (26)$$

Somit hat die Masse eines Sterns von gegebener Dichte eine obere Grenze.

Einen anderen Weg der elementaren Behandlung schlägt Haas ein¹⁾. Er urteilt folgendermaßen. Dem Weltall kommt sowohl Eigenenergie als auch Gravitationsenergie zu. Letztere entspricht einer aufzuwendenden Arbeit, ist daher negativ zu rechnen. Man kann die sehr naheliegende Annahme machen, daß die Gesamtenergie des Weltalls nicht negativ sein darf. Es muß also die Bedingung

$$Mc^2 - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \geq 0$$

erfüllt sein, oder:

$$\frac{3}{5} \frac{GM}{R} \leq c^2. \quad (27)$$

Das Eliminieren von R aus (21) und (27) ergibt:

$$\varrho \leq \frac{125}{36\pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}, \quad (28)$$

was mit (22) bis auf den Zahlenfaktor übereinstimmt²⁾. Der durchschnittliche Druck in einer homogenen Kugel ist gleich

$$\bar{P} = \frac{3}{20\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4}. \quad (29)$$

Eliminiert man R und M aus (21), (27) und (29), so erhält man:

$$\bar{P} \leq \frac{\varrho c^2}{3}. \quad (30)$$

Es ist klar, daß die Bedingung (30) der Bedingung (25) nicht direkt widerspricht, denn wenn der Zentraldruck den Wert

1) Arthur Haas, „Kosmologische Probleme der Physik“, S. 15 f., Leipzig 1934.

2) Die Gleichung (28) habe ich bereits in ZS. f. Phys. **66**, 282, 1930 aufgestellt. Den Aufsatz von A. Haas im Anz. Akad. Wiss. Wien **67**, 159, 1930 hatte ich damals übersehen.

$\frac{\varrho c^2}{3}$ nicht übersteigen darf, so darf es der durchschnittliche Druck erst recht nicht. Statt (28) kann man natürlich auch:

$$M \leq \frac{5^{3/2}}{6 \pi^{1/2}} \cdot \frac{c^3}{G^{3/2} \varrho^{1/2}} \quad (31)$$

schreiben, was gleichbedeutend mit:

$$M_{max} = \frac{c^3}{6 (\pi \varrho)^{1/2}} \left(\frac{5}{G} \right)^{3/2}$$

ist¹⁾. Die Formel (31) ist mit (26) bis auf den Zahlenfaktor identisch. Diese Formeln lassen sich mit gleichem Rechte sowohl auf das Weltall als Ganzes, wie auch auf die einzelnen Sterne anwenden.

Noch eine kleine Bemerkung. Haas drückt sich so aus: „Andererseits kommt dem Weltall jedenfalls auch Gravitationsenergie zu. Sie entspricht einer aufzuwendenden Arbeit, ist daher negativ zu rechnen... Wie aus der Potentialtheorie bekannt ist, ist die Gravitationsenergie einer homogenen Kugel von der Masse M gleichzusetzen $3fM^2/5R$, wenn f die Gravitationskonstante bedeutet und R den Kugelradius“²⁾. Hier ist Haas etwas inkonsequent: wenn die Gravitationsenergie, wie er sagt, negativ zu rechnen ist, so müßte er nicht $(+ 3fM^2/5R)$, sondern $(- 3fM^2/5R)$ als Gravitationsenergie der Kugel bezeichnen. Übrigens ist dies ein Streit um Worte. Wir haben ja eigentlich immer nur mit Differenzen der Gravitationsenergien zu tun, und wenn wir die Gravitationsenergie einer unendlich ausgedehnten Kugel gleich Null setzen, so ist diese Normalisierung bloß Sache einer Konvention, welche aber nicht immer streng eingehalten wird³⁾. Die Gravitationsenergie entspricht einer aufzuwendenden Arbeit und ist negativ zu rechnen, wenn man die Bewegung von dem gravitierenden Körper weg im Auge hat. Dieselbe Gravitationsenergie entspricht aber einem Arbeitsgewinn und ist daher positiv zu rechnen, wenn man die entgegengesetzte Bewegung im Sinne

1) Vgl. Arthur Haas, Phys. Rev. (2) **48**, 973, 1935.

2) Arthur Haas, Kosmolog. Probleme, S. 15.

3) So sagt man manchmal, daß kinetische Energie in potentielle übergehe. Natürlich meint dabei niemand, daß $(+ 1)$ Erg kinetischer Energie sich in $(- 1)$ Erg potentieller verwandle (was mit dem Gesetz der Erhaltung der Energie unvereinbar wäre), sondern in $(+ 1)$ Erg potentieller Energie.

hat. Es ist reine Konventionssache, welche Richtung wir auszeichnen wollen.

Es gibt noch einen dritten Weg, den ich bereits vor 13 Jahren eingeschlagen habe ¹⁾. Es möge die „materielle“ Masse eines homogenen Sterns mit dem Radius R gleich M_m und die „materielle“ Dichte gleich ϱ_m sein. Es ist also:

$$M_m = \frac{4}{3} \pi R^3 \varrho_m. \quad (32)$$

Zur unendlichen Ausdehnung braucht der Stern eine bestimmte Energiemenge E (die natürlich positiv zu rechnen ist). Sollte die im Stern vorhandene Energie ungenügend sein, so wollen wir das Fehlende von außen einführen. Jetzt ist die Gesamtmasse des Sterns gleich

$$M = M_m + \frac{E}{c^2} \quad (33)$$

geworden, und er hat die Möglichkeit sich bis zur Unendlichkeit auszudehnen. Die dazu notwendige Energiemenge ist gleich

$$E = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{5} \frac{G}{R} \left(M_m + \frac{E}{c^2} \right)^2, \quad (34)$$

was wir folgendermaßen umformen können:

$$E^2 - 2E \left(\frac{5}{6} \frac{Rc^4}{G} - M_m c^2 \right) + M_m^2 c^4 = 0.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung ergibt:

$$E = \frac{5}{6} \frac{Rc^4}{G} - M_m c^2 + \sqrt{\frac{25}{36} \frac{R^2 c^8}{G^2} - \frac{5}{3} \frac{R M_m c^6}{G}}. \quad (35)$$

Damit E reell bleibe, muß die Bedingung

$$\frac{25}{36} \frac{R^2 c^8}{G^2} \geq \frac{5}{3} \frac{R M_m c^6}{G},$$

oder:

$$c^2 \geq \frac{12}{5} \frac{G M_m}{R} \quad (36)$$

erfüllt sein. Eliminiert man R aus (36) und (32), so erhält man:

$$\varrho_m \leq \frac{125}{576 \pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M_m^2}. \quad (37)$$

¹⁾ W. Anderson, Astron. Nachrichten **218**, 205, 1923. Die von mir in diesem Artikel gezogene Schlußfolgerung ist jedoch unrichtig formuliert.

Das Gleichheitszeichen in (37) entspricht der maximalen zulässigen Dichte, und der entsprechende Radius ist nach (36) gleich

$$R = \frac{12}{5} \frac{GM_m}{c^2}. \quad (38)$$

Führt man diesen Wert von R in (35) ein, so erhält man:

$$E = M_m c^2.$$

In einem solchen Falle ist die Gesamtmasse nach (33) gleich

$$M = M_m + \frac{M_m c^2}{c^2} = 2 M_m;$$

also beträgt die Gesamtdichte

$$\varrho = 2 \varrho_m.$$

Setzt man nun $M_m = \frac{M}{2}$ und $\varrho_m = \frac{\varrho}{2}$ in (37) ein, so ergibt sich:

$$\varrho \leq \frac{125}{72 \pi} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (39)$$

Der Vergleich mit (28) zeigt, daß meine Methode einen genau doppelt so kleinen Koeffizienten ergibt, wie diejenige von Haas¹⁾.

Aus (19), (22), (28), (37) und (39) ist zu ersehen, daß die verschiedensten Methoden immer zu einem und demselben Resultat führen: die Dichte einer Kugel hat eine obere Grenze, welche umgekehrt proportional dem Quadrate der Kugelmasse ist. Daß diese obere Grenze unmöglich durch Inkompressibilität der Materie bedingt sein kann, ist leicht aus folgendem Beispiel zu ersehen. Eine in Wirklichkeit zwar nicht vorkommende, aber theoretisch dennoch mögliche Wasserstoffkugel von der Masse 10^{45} g könnte sich nach Tabelle 1 höchstens bis $1,74 \cdot 10^{-7}$ g. cm⁻³ verdichten. Trotzdem wird es doch wohl niemandem einfallen zu behaupten, daß Wasserstoff von der Dichte $1,74 \cdot 10^{-7}$ g. cm⁻³ bereits inkompressibel sei!

Jetzt taucht aber die selbstverständliche Frage nach dem „Mechanismus“ auf, durch den eine weitere Verdichtung verhindert wird. Eine Antwort auf diese Frage wollen wir auf Grund der Theorie von Nuut zu geben versuchen, von welcher im nächsten Abschnitt die Rede sein wird.

1) Die diesbezüglichen Untersuchungen von Pokrowski und von mir werden von Lundmark referiert im „Handbuch für Astrophysik“, 5. Band, 2. Hälfte, 1. Teil, S. 688 f., Berlin 1933.

Die Welt von J. Nuut.

Vor kurzem hat Nuut eine neue Theorie des Kosmos aufgestellt, welche sich von den bisherigen wesentlich unterscheidet¹⁾. Nuut betrachtet unseren dreidimensionalen Raum im großen als euklidisch, doch bewege sich dieser euklidische Raum in einem vierdimensionalen hyperbolischen Raume. Als Resultat dieser Bewegung sei die Expansion des Universums zu betrachten, welche somit nicht physikalischer, sondern rein geometrischer Natur sei. Auch entstehe dabei eine scheinbare Deformation des Weltraumes. Es sei streng zu unterscheiden zwischen den physikalischen „Eigengeschwindigkeiten“ und den rein geometrischen „Expansionsgeschwindigkeiten“. Erstere haben als obere Grenze die Lichtgeschwindigkeit c , letztere haben keine obere Grenze und addieren sich immer euklidisch. Nach der alten Auffassung müssen Körper (ohne Anfangsgeschwindigkeit), zwischen denen überhaupt keine Kräfte wirken, relativ zueinander ruhen. Nach der neuen Auffassung hingegen müssen sie sich voneinander immer mehr entfernen, wenn letzteres nicht durch irgendeine physikalische Kraft verhindert wird. Je größer aber die Dimensionen eines Körpers sind, desto größer wird auch sein Expansionsbestreben sein, bis schließlich bei genügend großen Dimensionen die inneren Attraktionskräfte überwunden werden und der Körper nach allen Seiten auseinanderfliegt. Die Expansionsgeschwindigkeit sei einfach proportional der Entfernung, und könne die Lichtgeschwindigkeit c beliebig überschreiten. Nuut macht noch darauf aufmerksam, daß die Einbettung einer Mannigfaltigkeit in eine andere von höherer Dimensionszahl eine jedem Geometer wohlbekannte Annahme sei.

Die Theorie von J. Nuut und die Expansionsformel von Einstein und W. de Sitter.

Einstein und de Sitter haben die Expansionsformel

$$\frac{1}{R^2} \left(\frac{dR}{cdt} \right) = \frac{1}{3} \lambda c \quad (40)$$

aufgestellt, wobei sie die Krümmung des Raumes gleich Null ansetzten und die bekannte kosmologische Konstante λ nicht

1) J. Nuut, „Eine nichteuklidische Deutung der relativistischen Welt“, Acta et Comm. Univ. Tartuensis (Dorpatensis) (A) 29₃, 1935; „Ansätze zu einer expansionistischen Kinematik“, ebenda (A) 29₆, 1935.

benutzten¹⁾. Einstein und de Sitter weisen darauf hin, daß diese Formel für eine Expansionsgeschwindigkeit von 500 km. sec⁻¹ per 10⁶ Pars. die Dichte $\varrho = 4.10^{-28}$ g. cm⁻³ ergibt, was mit der geschätzten oberen Grenze der Dichte des Universums gut übereinstimmt. Diese Dichte mag vielleicht etwas zu hoch sein, ist aber dennoch von der richtigen Größenordnung. Wenn wir die auf 1 cm Länge bezogene Expansionsgeschwindigkeit durch σ bezeichnen, so haben wir:

$$\sigma = \frac{1}{R} \cdot \frac{dR}{dt}, \quad (41)$$

und dies in (40) eingeführt ergibt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \kappa \varrho c^2, \quad (42)$$

oder, da $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ ist,

$$\sigma^2 = \frac{8\pi}{3} G \varrho. \quad (43)$$

Wir wollen jetzt versuchen, eine (bis auf den etwas abweichenden Zahlenfaktor) ähnliche Formel auf Grund der Theorie von Nuut abzuleiten. Nach dieser Theorie ist die Expansionsgeschwindigkeit proportional der Entfernung und hat keine obere Grenze. Sie muß also bei genügender Entfernung größer als c werden. Natürlich wird jede Signalübermittlung zwischen uns und einem so weit entfernten Punkt zur Unmöglichkeit, weil die Signalgeschwindigkeit niemals größer als c sein kann. Man könnte also sagen, daß diese Punkte für uns nicht existieren, daß sie sozusagen außerhalb unserer Welt liegen. Die Grenze „unserer“ Welt ist also dort, wo die Expansionsgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, d. h. wo $\frac{dR}{dt} = c$ ist. Dieser Wert in (41) eingeführt ergibt:

$$R = \frac{c}{\sigma}. \quad (44)$$

Alle weiter entfernten Punkte gehören schon zu einer anderen Welt, mit der wir gar nichts zu schaffen haben. Selbst wenn diese andere Welt plötzlich restlos verschwinden sollte, so würden wir von dieser Katastrophe niemals etwas er-

¹⁾ A. Einstein und W. de Sitter, Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) 18, 213, 1932.

fabren. Es ist klar, daß wir in unserer Welt keine Kugel konstruieren können, deren Radius größer als der Weltradius $R = \frac{c}{\sigma}$ wäre. Somit stellt (44) den maximalen zulässigen Radius einer Kugel dar. Andererseits ist nach (23) der maximale Radius gleich

$$R = \frac{c}{\sqrt{2\pi G \varrho}}. \quad (45)$$

Es ist nun ein sehr naheliegender Gedanke, das R in (44) zu identifizieren mit dem R in (45). Das Eliminieren dieser R aus (44) und (45) ergibt:

$$\sigma^2 = 2\pi G \varrho = \frac{1}{4} \kappa \varrho c^2. \quad (46)$$

Diese Formel unterscheidet sich von der Einstein-de Sitterschen Formel (42) [resp. (43)] nur durch den Zahlenfaktor.

Bei der Schätzung der Masse des Kosmos wird in erster Linie an die „materielle“ Masse gedacht (daher die bekannte Berechnung von $1,2 \cdot 10^{79}$ Protonen im Weltall). Es wäre daher ratsam, eine Expansionsformel mit ϱ_m , statt mit ϱ abzuleiten. Zu diesem Zweck eliminieren wir M_m aus (32) und (36); dies ergibt:

$$R^2 \geq \frac{5 c^2}{16 \pi G \varrho_m}.$$

Für den maximalen Radius haben wir die Gleichung

$$R^2 = \frac{5 c^2}{16 \pi G \varrho_m}. \quad (47)$$

Das Eliminieren von R aus (44) und (47) ergibt:

$$\sigma^2 = \frac{16 \pi G \varrho_m}{5} = \frac{2}{5} \kappa \varrho_m c^2. \quad (48)$$

Unsere Beobachtungen sind nicht genau genug, um zu entscheiden, ob (42), oder (46), oder (48) näher der Wirklichkeit ist. Jedenfalls ergeben alle drei Formeln die richtige Größenordnung.

Die Theorie von J. Nuut und die obere Grenze der Dichte.

Einstein hat in seiner ursprünglichen Theorie des Weltalls zwei Gleichungen aufgestellt:

$$\frac{\kappa \varrho}{2} = \frac{1}{R^2} \quad (49)$$

und

$$M = 4\pi^2 \frac{R}{\kappa}, \quad (50)$$

wo R den Krümmungsradius des Raumes bedeutet und M die Masse des Universums¹⁾. Das Eliminieren von R aus (49) und (50) ergibt:

$$\varrho = \frac{32\pi^4}{\kappa^3 M^2} = \frac{\pi}{16} \cdot \frac{c^6}{G^3 M^2}. \quad (51)$$

Nach dieser Gleichung läßt sich die durchschnittliche Dichte von Einsteinsabgeschlossenem Universum berechnen. Andererseits gelten für einen Stern im Zustand der maximalen zulässigen Kompression nach (19), (22), (28) oder (39) Gleichungen, welche sich von der Einsteinschen (51) nur durch Zahlenfaktoren unterscheiden. Es liegt daher der Gedanke sehr nahe, einen Stern im Zustande der maximalen Kompression als eine in sich ebenso abgeschlossene Welt wie das Einsteinsche Universum zu betrachten. In einem solchen Falle müssen wir aber konsequenterweise auf derartige Sterne die Theorie von Nuut im vollen Maße anwenden, also auch die Expansionsformeln (46) oder (48) [oder vielleicht auch (42)]. Nun ist ϱ bei maximal komprimierten Sternen sehr viel größer als die durchschnittliche Dichte des Universums; also muß auch der Expansionskoeffizient σ entsprechend größer sein. Er ist so groß, daß die Oberfläche des Sternes sich bereits mit Lichtgeschwindigkeit vom Zentrum weg entfernt. Kann aber so etwas nicht für die anderen Himmelskörper gefährlich werden, die sich zufälligerweise in der Nähe befinden? — Wir untersuchen jetzt diese Frage.

Nach der Nuutschen Theorie bewegt sich ein dreidimensionaler euklidischer Raum in einem vierdimensionalen hyperbolischen Raume. Um aber das Bild dem Leser anschaulich zu machen, behandelt Nuut anfänglich die Bewegung einer Fläche (= zweidimensionale Welt) in einem dreidimensionalen hyperbolischen Raume. Wir können jedoch in Erweiterung der Nuutschen Theorie annehmen, daß im selben hyperbolischen Raume sich noch viele andere Flächen bewegen, ohne dabei einander zu berühren. Es wäre auch nicht schwer sich eine Verdoppelung einer Fläche vorzustellen, was durch Ablösung einer parallelen Fläche zustande kommen könnte. Obgleich die gegenseitige Entfernung der beiden Flächen beliebig klein sein kann, ist sie

1) A. Einstein, Berl. Ber. 1917, S. 152.

für die zweidimensionalen Einwohner beider Flächen trotzdem unüberbrückbar, da sie in der dritten Dimension liegt. In analoger Weise könnte man sich eine „Verdoppelung“ des dreidimensionalen euklidischen Raumes vorstellen, der sich im vierdimensionalen hyperbolischen bewegt. Sobald ein Stern sich bis zur äußersten zulässigen Grenze verdichtet hat, geht er in einen neuen dreidimensionalen euklidischen Raum über, der sich durch eine Raumsplaltung in der Richtung der vierten Dimension von dem ursprünglichen dreidimensionalen Raum abgetrennt hat. Die Entfernung der beiden dreidimensionalen euklidischen Räume (die sich von nun an nirgends mehr berühren) kann beliebig klein sein; trotzdem ist sie für die Einwohner beider Räume unüberbrückbar, da sie in der vierten Dimension liegt. Jetzt kann sich der Stern gemäß der Nuutschen Theorie beliebig ausdehnen, ohne mit irgendeinem Körper der „alten“ Welt zusammenzustoßen. Durch einen solchen Prozeß würde es den Sternen unmöglich gemacht werden, sich mehr zu verdichten, als es nach (19), (22), (28) oder (39) zulässig ist. Die so erweiterte Theorie von Nuut wäre also imstande den „Mechanismus“ zu erklären, durch welchen die Entstehung einer unzulässig großen Dichte verhindert wird. Wenn wir aber für das Alter der Welt die „kurze“ Zeitskala akzeptieren, so ist es noch fraglich, ob bis jetzt überhaupt irgendein Stern Zeit gehabt hat die kritische Dichte zu erreichen.

II. TEIL.

Über die im Weltall tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten und Temperaturen.

Eine mathematisch bedenkliche Methode von E. C. Stoner zur Berechnung der maximalen Temperaturen.

Stoner sagt: „Provided that the mass of a star is below the critical value, a maximum temperature may also be fixed by the condition of equation . . . which may be written

$$P(\varrho) + \frac{1}{3} a T^4 \gtrless B_0 (M/M_s)^{2/3} \varrho^{4/3}.$$

Since $P(\varrho)$ is the maximum pressure of ionized matter at the density ϱ ,

$$\frac{1}{3} a T^4 \gtrless B_0 (M/M_s)^{2/3} \varrho^{4/3} - P(\varrho).$$

The maximum value of T occurs when the right-hand side is a maximum¹⁾. Daraufhin findet Stoner, daß die linke Seite (also auch T) ihr Maximum bei $\varrho = \left(\frac{4 B_0}{5 k_1}\right)^3 \left(\frac{M}{M_s}\right)^2$ haben müsse (wenn $P(\varrho) = k_1 \varrho^{5/3}$ ist).

Gegen einen solchen Gedankengang muß ich aber Einspruch erheben, und zwar will ich meine Ansicht an einem konkreten Beispiel illustrieren. Wir können z. B. schreiben:

$$\sin^4 \left(\frac{\pi \varrho}{\varrho_0} \right) \gtrless 1 + \cos^2 \left(\frac{\pi \varrho}{\varrho_0} \right).$$

Die rechte Seite hat ihr Maximum bei $\varrho = 0$ und bei $\varrho = \varrho_0$. Nach Stoner müßte man erwarten, daß bei denselben Werten von ϱ auch die linke Seite ihr Maximum habe. Dies trifft aber nicht zu, sondern das genaue Gegenteil findet statt: bei $\varrho = 0$ und $\varrho = \varrho_0$ erreicht die rechte Seite ihr Maximum, die linke aber ihr Minimum; bei $\varrho = \frac{\varrho_0}{2}$ und $\varrho = \frac{3\varrho_0}{2}$ hat die rechte ihr Minimum

1) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 666 f., 1932.

erreicht und die linke ihr Maximum. Ich möchte natürlich nicht behaupten, daß auch Stoners Formel sich ebenso verhalte, aber a priori ist die Sache nicht klar. Meine Bedenken gegen Stoners Verfahren sind also rein mathematischer Natur.

Prioritätsfrage hinsichtlich der zum ersten Mal explizite aufgestellten relativistischen Entartungsformel. Eddingtons Angriff gegen diese Formel. Zurückweisung seines Angriffs.

Solange die Nullpunktsgeschwindigkeiten der Elektronen eines völlig entarteten Gases klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, gilt die Gleichung

$$p = K_1 \varrho^{5/3}, \text{ resp. } p = K_1^1 n^{5/3}. \quad (52)$$

Bei extremen Nullpunktsgeschwindigkeiten hingegen gilt die „relativistische“ Gleichung

$$p = K_2 \varrho^{4/3}, \text{ resp. } p = K_2^1 n^{4/3}. \quad (53)$$

Hier bedeutet n die Zahl der Elektronen pro ccm, die proportional der Dichte ϱ ist; K_1 , K_2^1 , K_2 und K_2^1 sind Konstanten.

Ich glaube der erste gewesen zu sein, der eine solche „relativistische“ Gleichung explizite aufgestellt hat. Leider war mein damaliges Verfahren recht ungenau¹⁾, so daß die Koeffizienten in (53) merklich von der Wirklichkeit abwichen. Ich habe damals die erwähnte Gleichung folgendermaßen geschrieben:

$$p = \left(\frac{2A}{3} \right)^{1/2} c n^{4/3},$$

wo A zur Abkürzung für $\frac{1}{20} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{2/3} h^2$ gesetzt war²⁾. Ohne Abkürzung geschrieben sieht meine damalige Gleichung folgendermaßen aus:

$$p = \left(\frac{1}{30} \right)^{1/2} \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3}. \quad (54)$$

Stoner war der erste, der den Koeffizienten der „relativistischen“ Gleichung richtig berechnete³⁾. Die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist nach Stoner gleich

1) Unter anderem hatte ich das statistische Gewicht des Elektrons gleich 1, statt gleich 2 gesetzt.

2) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 435, Gleichung (12), 1929.

3) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) **9**, 944, 1930.

$$\frac{3}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3}.$$

Der entsprechende Druck ist gleich $\frac{1}{3}$ dieser Energie (im Gegensatz zu $\frac{2}{3}$ im nicht relativistischen Falle), somit haben wir:

$$p = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3}. \quad (55)$$

Der Vergleich meiner ursprünglichen relativistischen Formel (54) mit der Stonerschen (55) zeigt nur in den Koeffizienten einen Unterschied. Die relativistische Gleichung ist viel benutzt worden von Chandrasekhar u. a., hat also allgemeine Anerkennung gefunden.

Um so größer war die Überraschung, als Eddington auf dem Meeting of the Roy. Astron. Soc. vom 11. Januar 1935 sich folgendermaßen ausdrückte: „I do not know whether I shall escape from this meeting alive, but the point of my paper is that there is no such thing as relativistic degeneracy!“¹⁾ Auf einem späteren Meeting (vom 10. Mai 1935) sagt er: „I have only to add that my degeneracy formula seems to have raised a hornet's nest about me. In my opinion, however, I have not yet been stung!“²⁾ Eddington hat seine Ansichten über die relativistische Entartung in zwei größeren Aufsätzen ausführlich entwickelt³⁾. Eddington behauptet darin, daß der Nullpunktdruck eines Gases niemals durch die Gleichung $p = K_2 \varrho^{4/3}$ ausgedrückt werden könne, sondern immer nur durch $p = K_1 \varrho^{5/3}$. Möller und Chandrasekhar haben Eddingtons Argumente einer Kritik unterzogen⁴⁾. In einem weiteren Aufsatz sagt Chandrasekhar: „Eddington has questioned the validity of the relativistic equation of degenerate matter which is still generally accepted. There are, however, grounds for not abandoning the accepted form of the equation of state“⁵⁾.

Wir wollen Eddington auf eine ganz andere Weise widerlegen, indem wir beweisen folgendes

1) A. S. Eddington, The Observatory **58**, 38, 1935.

2) Ebenda, S. 176.

3) A. S. Eddington, Monthly Not. R. A. S. **95**, 194, 1935; Proc. Roy. Soc. London (A) **152**, 253, 1935.

4) Chr. Möller und S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **95**, 673, 1935.

5) Ebenda, S. 676.

Theorem.

Entweder hat ein Gas einen Nullpunktsdruck, oder es hat keinen. Wenn es einen Nullpunktsdruck hat, so muß letzterer bei kleinen Nullpunktsgeschwindigkeiten proportional $n^{5/3}$ sein, und bei extrem großen proportional $n^{4/3}$. Um dies zu beweisen, ist weder Fermi-Statistik noch überhaupt Quantentheorie notwendig, sondern bloß die elementarsten Grundgesetze der Thermodynamik und der Relativitätstheorie.

Beweis.

Das „erste“ Gesetz der Thermodynamik wird so geschrieben :

$$dQ = dU + p dv. \quad (56)$$

Hier bedeutet dQ die zugeführte Wärme und dU den Zuwachs an innerer Energie. Die Gleichung (56) muß immer erfüllt sein, ganz unabhängig davon, ob p einen gewöhnlichen Gasdruck oder einen Nullpunktsdruck darstellt, ob U gewöhnliche thermische oder Nullpunktsenergie bedeutet. Die Gleichung (56) drückt ja das Gesetz der Erhaltung der Energie aus, und dies Gesetz macht für den entarteten Zustand keine Ausnahme! Für ein einatomiges Gas kann U mit der translatorischen Energie der Atome identifiziert werden, wobei es wiederum belanglos ist, ob die translatorischen Geschwindigkeiten Nullpunktsgeschwindigkeiten darstellen oder gewöhnliche thermische Geschwindigkeiten. Bei einer adiabaten Ausdehnung muß $dQ = 0$ gesetzt werden; außerdem können wir $U = vE$ schreiben, wenn E die Energiedichte bedeutet. Gleichung (56) geht dann über in:

$$0 = d(vE) + p dv = v dE + E dv + p dv = v dE + (E + p) dv. \quad (57)$$

Bei kleinen Atomgeschwindigkeiten ist bekanntlich $p = \frac{2E}{3}$. Dies in (57) eingeführt ergibt:

$$0 = v dE + \frac{5}{3} E dv.$$

Führt man die Integration aus, so erhält man:

$$Ev^{5/3} = \text{Konst.},$$

also (wenn man bedenkt, daß $p \sim E$ ist):

$$p \sim E \sim \frac{1}{v^{5/3}}. \quad (58)$$

Nähern sich hingegen die Atomgeschwindigkeiten der Lichtgeschwindigkeit, so muß $p = \frac{E}{3}$ gesetzt werden ¹⁾. Dann erhalten wir aus (57):

$$0 = v dE + \frac{4E}{3} dv,$$

oder:

$$p \sim E \sim \frac{1}{v^{4/3}}. \quad (59)$$

Da $v \sim \frac{1}{n}$ ist, so erhalten wir aus (58) für kleine Atomgeschwindigkeiten:

$$p \sim n^{5/3} \quad (60)$$

und aus (59) für extrem große Atomgeschwindigkeiten:

$$p \sim n^{4/3}. \quad (61)$$

Das Wort „Nullpunktsdruck“ bedeutet, daß ein Gas diesen Druck beim absoluten Nullpunkt der Temperatur aufweist. Läßt man in einem solchen Falle das Gas sich unter Arbeitsleistung adiabatisch ausdehnen, so kann seine Temperatur natürlich nicht fallen, da sie am Anfang der Expansion bereits beim absoluten Nullpunkt war. Sich bei dieser Expansion erwärmen kann das Gas ebenfalls nicht, denn sonst müßte dasselbe (erwärmte) Gas beim umgekehrten Prozeß wieder bis zum absoluten Nullpunkt abkühlen. Dies würde aber bedeuten, daß wir imstande wären, durch einfache adiabate Kompression eines warmen Gases den absoluten Nullpunkt zu erreichen, der nach der dominierenden Ansicht für unerreichbar gilt. Somit darf unser Gas weder sich erwärmen noch abkühlen, es muß also seine Temperatur unverändert beim absoluten Nullpunkt bleiben, und p wird daher die ganze Zeit den Nullpunktsdruck darstellen. Daraus ziehen wir die wichtige Schlussfolgerung, daß die adiabate Zustandsgleichung identisch mit der Zustandsgleichung eines völlig entarteten Gases sein muß. Somit können wir (60) auf gewöhnliche volle Entartung beziehen, und (61) auf relativistische. Damit ist unser Theorem bewiesen.

Bei kleinen Geschwindigkeiten kann die Masse eines jeden

1) Vgl. W. Anderson, „Die Beziehung zwischen dem Gasdruck und der translatorischen Energie der Gasmoleküle“, ZS. f. Phys. 58, 443, 1929.

Atoms als konstant und von n unabhängig angesehen werden; somit muß die Masse von n Atomen, d. h. die Dichte ϱ , proportional n sein. Statt (60) können wir also schreiben:

$$p \sim \varrho^{5/3}. \quad (62)$$

Bei großen Geschwindigkeiten, also bei großen n , ist die Masse eines einzelnen Atoms nicht konstant und hängt von n ab. Bei extremen Geschwindigkeiten ist die Masse, also auch die Dichte, des Gases in der Hauptsache kinetischer Natur, d. h. $\varrho = \frac{E}{c^2}$. Da in diesem Falle $p = \frac{E}{3}$ ist, so können wir schreiben:

$$p = \frac{1}{3} \varrho c^2, \quad (63)$$

also genau so wie bei der Hohlraumstrahlung.

Sollte aber einem solchen „relativistischen“ Gase ein anderes „nichtrelativistisches“ in genügender Proportion beige-mischt sein, dessen Atome sehr viel schwerer sind, so können die Massen der letzteren den Hauptteil der Gesamtmasse aus-machen. Die Zahl der schweren Atome sei proportional n ; sie bewegen sich so langsam, daß ihre Massen als konstant ange-sehen werden dürfen. In einem solchen Falle wird die Dichte des Gases proportional der Zahl der schweren Atome pro ccm sein, also auch proportional n . Statt (61) können wir schreiben:

$$p \sim \varrho^{4/3}. \quad (64)$$

Ein solcher Fall begegnet uns bei (mechanisch) ionisiertem Gase, dessen Elektronen relativistisch und dessen Atomkerne nicht-relativistisch entartet sind. Sollten letztere auch relativistisch entartet sein, so gilt nicht mehr (64), sondern (63), wie dies nicht schwer einzusehen ist.

Bei allen diesen Betrachtungen haben wir weder zur Fermi-Statistik, noch überhaupt zur Quantentheorie Zuflucht genom-men. Die Fermi-Statistik ist notwendig um zu zeigen, daß Gase, welche dieser Statistik folgen, Nullpunktsenergie besitzen. Fermi-Statistik ist auch nötig, um die Koeffizienten in (52) und (53) genau zu berechnen. Will man aber bloß den Exponenten von n (resp. von ϱ) berechnen, so genügen die elementaren Gesetze der Thermodynamik und der Relativitätstheorie. Der Exponent von n hat nur indirekt mit der Fermi-Statistik zu tun. Mehr als das: wir werden gleich sehen, daß sogar die relativistische

Formel $p = K h c n^{4/3}$ (wo K einen Zahlenfaktor bedeutet) durchaus nicht als etwas für die Fermi-Statistik Spezifisches betrachtet werden darf!

Der Druck der Hohlraumstrahlung ist gleich

$$p = \frac{a T^4}{3} = \left(\frac{8 \pi^5 k^4}{15 c^3 h^3} \right) \frac{T^4}{3} = \frac{8 \pi^5 k^4 T^4}{45 c^3 h^3}. \quad (65)$$

Die in einem ccm enthaltene Zahl der Lichtquanten kann gleich

$$n = 8 \pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} = 2,40412 \cdot 8 \pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \quad (66)$$

angenommen werden¹⁾. Das Eliminieren von T aus (65) und (66) ergibt:

$$p = \frac{\pi^{11/3} h c n^{4/3}}{90 \cdot (2,40412)^{4/3}} = 0,22946 \cdot h c n^{4/3}. \quad (67)$$

Andererseits ergibt Stoners Formel (55) für ein relativistisch entartetes Elektronengas:

$$p = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} h c n^{4/3} = 0,12309 \cdot h c n^{4/3}. \quad (68)$$

Die Formel (67) bezieht sich auf „Lichtquantengas“ (Hohlraumstrahlung), welches bekanntlich der Bose-Statistik folgt; die Formel (68) hingegen auf relativistisch entartetes Elektronengas (bei 0° abs.), welches der Fermi-Statistik folgt. Im ersteren Falle haben wir es mit Temperaturgeschwindigkeiten der Lichtquanten zu tun, im letzteren mit Nullpunktsgeschwindigkeiten der Elektronen. Trotz dieses großen Unterschieds sind beide Formeln bis auf den Zahlenfaktor identisch! Damit ist bewiesen, daß eine Gleichung von der Form $p = K h c n^{4/3}$ sowohl für die relativistischen Nullpunktsgeschwindigkeiten (bei Fermi-Statistik) als auch für die Temperaturgeschwindigkeiten (bei Bose-Statistik) gültig ist.

Als ich vor sieben Jahren den Druck der Hohlraumstrahlung als Nullpunktsdruck der Lichtquanten auffaßte und ihn daher nach den Regeln der Fermi-Statistik berechnete, so schien es damals, als ob ich einen prinzipiellen Fehler begehe. Jetzt sehen wir, daß der Fehler gar nicht sehr groß ist. Mehr als das:

1) A. S. Eddington, „The Internal Constitution of the Stars“, S. 55 f., Cambridge 1926.

bei der Berechnung des relativistischen Nullpunktsdrucks des Lichtquantengases benutzte ich damals meine ursprüngliche Gleichung (54), also

$$p = \left(\frac{1}{30}\right)^{1/2} \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3} hcn^{4/3} = 0,22652 \cdot hcn^{4/3}. \quad (69)$$

Der Vergleich mit (67) zeigt nicht bloß eine annähernde, sondern eine beinahe absolute Übereinstimmung.

Schon damals (mein Manuskript ist am 23. Februar 1929 bei der Redaktion der „Zeitschrift für Physik“ eingegangen) rechnete ich nicht nur mit der relativistischen Entartung, sondern suchte sogar den Übergang von gewöhnlicher zu relativistischer Entartung mathematisch zu erfassen. Zu diesem Zweck leitete ich die Formel

$$m = \frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0^2}{4} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3} \right)^{1/2} \quad (70)$$

ab, wo m_0 die Ruhemasse des Elektrons bedeutet und m seine Gesamtmasse. Letztere führte ich in die Gleichung

$$p = 3,301 \cdot 10^{-54} \cdot \frac{n^{5/3}}{m} \quad (71)$$

ein¹⁾. Auf diese Weise konnte ich den Nullpunktsdruck des Elektronengases für das Übergangsgebiet von der gewöhnlichen zu der relativistischen Entartung berechnen (freilich sind die hier auftretenden Zahlenfaktoren nicht ganz richtig).

Drei Jahre später hat Stoner eine Tabelle für das erwähnte Übergangsgebiet veröffentlicht²⁾. In der vorletzten Kolumne dieser Tabelle sind die Verhältnisse zwischen dem wirklichen Nullpunktsdruck und dem nach der gewöhnlichen nichtrelativistischen Formel berechneten aufgeführt. Die letzte Kolumne der Tabelle enthält die Verhältnisse zwischen dem wirklichen Nullpunktsdruck und dem nach der gewöhnlichen relativistischen Formel berechneten.

Nun laßen sich derartige Verhältniszahlen auch aus unseren Formeln (70) und (71) berechnen, und es ist interessant, die so gewonnenen Zahlen mit den Stonerschen zu vergleichen. Die Gleichung (71) zeigt, daß der Nullpunktsdruck umgekehrt pro-

1) W. Anderson, ZS. f. Phys. **54**, 436 f., 1929.

2) E. C. Stoner, Monthly Not. R. A. S. **92**, 657, 1932.

portional m ist. Nach der gewöhnlichen nichtrelativistischen Formel muß man in (71) $m = m_0$ setzen, wodurch aber p zu groß wird. Das Verhältnis des wirklichen Druckes zu dem so berechneten ist gleich

$$\frac{m_0}{m} = \frac{1}{0,5 + (0,25 + 6,7944 \cdot 10^{-21} n^{2/3})^{1/2}}, \quad (72)$$

und das Verhältnis des wirklichen Druckes zu dem nach der gewöhnlichen relativistischen Formel berechneten:

$$\begin{aligned} & \frac{(5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3})^{1/2}}{\frac{m_0}{2} + \left(\frac{m_0^2}{4} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3} \right)^{1/2}} = \\ & = \frac{7,4186 \cdot 10^{-38} n^{1/3}}{4,5 \cdot 10^{-28} + (2,025 \cdot 10^{-55} + 5,5035 \cdot 10^{-75} n^{2/3})^{1/2}}. \end{aligned} \quad (73)$$

In Tabelle 2 sind die so berechneten Verhältniszahlen mit den entsprechenden Stonerschen zusammengestellt.

Tabelle 2.

| Übergangsgebiet von der gewöhnlichen zu der relativistischen Entartung. | | | | |
|---|---|--|-------------------------------------|--|
| log n | Verhältnis des wirklichen Nullpunktsdrucks zu dem nach der gewöhnlichen | | | |
| | nichtrelativistischen Formel berechneten | | relativistischen Formel berechneten | |
| | nach E. C. Stoner (im Jahre 1932) | auf Grund meiner im Jahre 1929 aufgestellten Formeln | nach E. C. Stoner (im Jahre 1932) | auf Grund meiner im Jahre 1929 aufgestellten Formeln |
| 26,7732 | 0,996 | 0,995 | 0,0796 | 0,0689 |
| 28,2045 | 0,967 | 0,960 | 0,232 | 0,199 |
| 29,1078 | 0,894 | 0,869 | 0,429 | 0,361 |
| 30,0108 | 0,709 | 0,680 | 0,682 | 0,565 |
| 30,6762 | 0,520 | 0,507 | 0,832 | 0,702 |
| 32,7732 | | | 0,990 | 0,930 |
| 34,2045 | | | 0,999 | 0,976 |

Die wichtigsten Fehler in meinem oben erwähnten Aufsatz vom Jahre 1929 waren:

1) ich setzte das statistische Gewicht des Elektrons gleich 1 (statt gleich 2), und

2) ich nahm an, daß auch in relativistischen Fällen der Druck $\frac{2}{3}$ der im ccm enthaltenen kinetischen Energie ausmache (statt $\frac{1}{3}$).

Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht!

Wir haben Eddingtons Einwände widerlegt. Damit könnte man die von ihm aufgerollte Frage als erledigt betrachten. Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht! Um dies jedoch zu verstehen, müssen wir vorher folgendes Problem untersuchen.

Sommerfeld sagt: „Die Geschwindigkeit ist im Aphel klein und steigt mit der Annäherung an das Perihel. Wenn das Elektron auf einer solchen Bahn in nächster Nähe des Kerns vorbeisaut, dem starken Kraftfelde in der Kernnähe ausgesetzt, so steigt mit der Geschwindigkeit auch seine Masse an . . . Mit der Massenveränderlichkeit hängt auch die Perihelbewegung der Ellipse zusammen“ ¹⁾. Die Theorie der Massenveränderlichkeit des Elektrons gestattete es Sommerfeld, die sogen. „relativistische Feinstruktur“ qualitativ und quantitativ zu erklären. Dies betrachtet Sommerfeld als endgültigen Beweis der Richtigkeit seiner Theorie. „Was für die allgemeine Relativitätstheorie die Perihelbewegung des Merkur bedeutet, das bedeutet für die spezielle Relativitätstheorie und für die Atomstruktur der Tatsachenkomplex der Feinstruktur.“

Sehen wir uns aber etwas näher die Konsequenzen an, zu denen Sommerfelds Interpretation der Feinstruktur uns führt.

Es möge ein Elektron unter Ausstrahlung des Energiequants $h\nu$ von einer höheren Quantenbahn auf eine niedrigere übergehen. Nach dem Übergange ist die Geschwindigkeit sowohl des Elektrons als auch des Atomkerns ²⁾ größer geworden, also müßte nach Sommerfeld die Masse des Elektrons und des Kerns (d. h. die Masse des ganzen Atoms) sich vergrößert haben. In

1) A. Sommerfeld, „Atombau und Spektrallinien“, 4. Auflage, S. 419 Braunschweig 1924.

2) Das Elektron und der Kern rotieren ja um ihren gemeinsamen Schwerpunkt.

Wirklichkeit hat sich aber die Atommasse durch den Verlust des Energiequants $h\nu$ um $\frac{h\nu}{c^2}$ verringert!

Man könnte vielleicht einwenden, daß die Masse des Atoms nicht einfach gleich der Summe der Elektronen- und der Kernmasse sei, sondern daß die Beziehung bestehe:

$$\text{Masse des Atoms} = \text{Masse des Elektrons} + \text{Masse des Kerns} + \text{Masse der potentiellen Energie.}$$

Da nun letztere als negativ angenommen wird, so wäre eine Abnahme der Atommasse (als Ganzes) bei gleichzeitiger Zunahme der Elektronen- und der Kernmasse tatsächlich denkbar. Aber wo soll denn diese potentielle Energie lokalisiert sein? Soll man sie sich als Fluidum von negativer Masse vorstellen, in welches das Elektron und der Kern eingebettet sind? Natürlich müßte daß „Abblasen“ des Fluidums als unmöglich angenommen werden, so daß letzteres dem Elektron und dem Kern immer folgen müßte. Wenn aber dieses Fluidum mit negativer Masse auch nur teilweise dem Elektron folgt, so muß die Masse des letzteren beim Rotieren um den Kern verkleinert erscheinen, was auf die „relativistische“ Feinstruktur nicht ohne Einfluß bleiben dürfte.

Ich glaube die Sache viel einfacher erklären zu können, und zwar ohne jedes mystische Fluidum von negativer Masse. Mein Gedanke läßt sich besonders augenscheinlich am primitiven elektrostatischen Modell des Elektrons demonstrieren. Um die notwendige Elektrizitätsmenge auf der kleinen Elektronenoberfläche zu konzentrieren, muß zur Überwindung der elektrostatischen Abstoßungskraft eine bestimmte Energiemenge zugeführt werden, deren Masse mit der Ruhemasse des Elektrons identisch ist. Sollte sich nun in der Nähe ein anderer Körper mit entgegengesetzter Ladung befinden, so ist bekanntlich eine geringere Energiemenge als vorher notwendig. Dann muß aber auch die Ruhemasse des Elektrons kleiner sein. Somit hängt die Ruhemasse des primitiven elektrostatischen Elektrons von der Nähe anderer Ladungen ab. Bewegt sich nun dies primitive Elektron um den Kern längs einer Ellipse, so wird die kinetische Energie des Elektrons (also auch die Masse dieser Energie) bei der Annäherung an den Kern wachsen. Dafür wird aber die Ruhemasse des Elektrons abnehmen, und zwar um genau so viel, daß die Gesamtmasse des Elektrons unverändert bleibt.

Letzteres wird ja vom Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt. Natürlich verlangt dasselbe Gesetz, daß nicht nur das primitive elektrostatische, sondern auch das wirkliche Elektron sich genau in gleicher Weise verhalte. Somit muß die Gesamtmasse (d. h. kinetische Masse + Ruhemasse) des Elektrons bei seiner elliptischen Bewegung um den Kern (richtiger: um den gemeinsamen Schwerpunkt) konstant bleiben. Wie ist aber in einem solchen Falle Sommerfelds sogen. „relativistische“ Feinstruktur zu erklären?

„Es wirken demnach auf zwei einander entsprechende Ladungen des bewegten Systems Σ und des ruhenden Systems Σ_0 Kräfte, die bezüglich der Komponenten parallel der Bewegungsrichtung einander gleich sind, während die zur Bewegungsrichtung senkrechten Komponenten in Σ im Verhältnis $\alpha = \sqrt{1-\beta^2}$ kleiner sind als in Σ_0 “¹⁾.

Ich glaube, daß wir nolens volens gezwungen sind eine ähnliche Beeinflussung der elektrostatischen Anziehungskraft auch zwischen Elektron und Kern anzunehmen. Das Multiplizieren dieser Anziehungskraft mit $\sqrt{1-\beta^2}$ muß ja genau zu derselben „relativistischen“ Feinstruktur führen, wie das Multiplizieren der Elektronenmasse mit $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Somit hat Sommerfeld nach unserer Meinung die „relativistische“ Feinstruktur falsch interpretiert. Sollte aber jemand in dieser Frage mit uns nicht einverstanden sein, so möge er selber nach einem besseren Auswege suchen. Jedenfalls darf der Konflikt zwischen Sommerfelds Auffassung und dem Gesetz der Erhaltung der Energie nicht einfach ignoriert werden, sondern verlangt Aufklärung.

Ähnlich liegen die Verhältnisse auch im Falle der Newtonschen Gravitation. Wenn ein Himmelskörper längs einer Ellipse um einen anderen (genauer: um den gemeinsamen Schwerpunkt) rotiert, so muß bei beiden die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert sein durch eine gleichgroße Verringerung der Ruhemasse. Sollten aber trotzdem die Beobachtungen scheinbar auf eine Veränderlichkeit der Gesamtmasse hindeuten, so darf die Interpretation dieser Erscheinung nicht dem Gesetz der Erhaltung der Energie widersprechen; oder man interpretiere die Erscheinung überhaupt nicht!

1) M. Abraham, „Theorie der Elektrizität“, 4. Auflage, 2. Band, S. 145, Leipzig — Berlin 1920.

Konstanz der Ruhemasse bedeutet Veränderlichkeit der Gesamtmasse. Eine solche Veränderlichkeit widerspricht aber nicht nur dem Gesetz der Erhaltung der Energie, sondern auch noch einem anderen Grundgesetz der Mechanik. Es sei ein Himmelskörper mit einem Satelliten gegeben, der um den ersteren längs einer Ellipse rotiert. Bei konstanten Ruhemassen beider Körper müßte sich die Gesamtmasse des ganzen Systems periodisch ändern. In gewisser Entfernung von diesem System befinde sich ein zweites gleiches, dessen Gesamtmasse ebenfalls periodisch schwankt. Mögen die Phasen beider Schwingungen gegeneinander um 180° verschoben sein: erreicht die Gesamtmasse des einen Systems ihr Maximum, so ist bei dem zweiten System Minimum, und umgekehrt. Die Folge davon wird sein, daß der gemeinsame Schwerpunkt beider Systeme nicht immer genau in der Mitte zwischen ihnen liegen wird, sondern sich bald nach der einen, bald nach der anderen Seite verschieben muß. Die beiden Systeme zusammen bilden ein System höherer Ordnung, dessen Schwerpunkt ausschließlich durch innere Kräfte hin- und herbewegt wird. Dies widerspricht aber einem bekannten Grundgesetz der Mechanik, wonach innere Kräfte niemals den Schwerpunkt eines Systems verändern können.

Siedentopf sagt: „Im entarteten Gebiete wächst mit steigender Dichte die Nullpunktsenergie, damit die Nullpunktsgeschwindigkeit und mithin auch die Masse der freien Teilchen, so daß infolge des Steigens des Energieinhalts die Gesamtmasse des Sternes bei zunehmender Dichte einen Zuwachs erfahren müßte. Dies Ergebnis ist offenbar absurd; um ihm zu entgehen, müssen wir auch die Masse der potentiellen Energie mitberücksichtigen“¹⁾. Nach unserer Auffassung wird dieser Forderung am einfachsten durch die Annahme einer veränderlichen Ruhemasse genügt. Die Verdichtung des Sterns ist begleitet von einer Zunahme der kinetischen Massen der einzelnen Partikeln und einer Abnahme ihrer Ruhemassen. Wäre der Stern von der Masse M imstande sich so weit zu verdichten, daß die frei gewordene Kontraktionsenergie den Wert Mc^2 erreicht, so müßte die ganze Ruhemasse verschwinden und nur kinetische Masse nachbleiben, wie dies bei der Hohlraumstrahlung der Fall ist. Wir hätten also eine restlose Verwandlung von Materie in Energie

1) H. Siedentopf, Astron. Nachr. **241**, 282, 1931.

vor uns. Natürlich wäre in diesem Falle die Zustandsgleichung durch (63) gegeben. Was müßten wir aber von einer weiteren Verdichtung des Sterns erwarten, wenn sie möglich wäre? — Offenbar negative Werte für die Ruhemasse! Auf diese Frage kommen wir noch später zurück. Nach (28) verschwindet die Ruhemasse der Sonne bei $\rho = 6,82 \cdot 10^{17} \text{ g.cm}^{-3}$. Ob sich die Sonne so weit verdichten kann, ist eine andere Frage.

Die relativistische Entartung beruht darauf, daß bei großer Nullpunktsenergie die Gesamtmasse eines einzelnen Elektrons sich merklich vergrößert. Ist aber die Zunahme an kinetischer Masse durch die gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse genau kompensiert, so muß selbst bei relativistischen Nullpunktsgeschwindigkeiten nicht die relativistische, sondern die gewöhnliche Entartungsformel angewandt werden, weil ja die Gesamtmasse eines jeden Elektrons unverändert bleibt. In diesem Sinne hat also Eddington recht!

Es möge ein Stern nur aus Neutronen bestehen, die bekanntlich gleich den Elektronen der Fermi-Statistik folgen¹⁾. Die Masse des Neutrons setzen wir gleich $1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Nullpunktsenergien der einzelnen Neutronen untereinander gleich sind, und daß der Stern im Verlaufe seines „Lebens“ keine Energie ausgestrahlt hat. In diesem Falle muß die Gesamtmasse des Sterns im abgekühlten Endstadium mit der anfänglichen Gesamtmasse identisch sein, desgleichen die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons, bei dem also die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert wird durch gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse. Wenn so, so darf selbst bei relativistischen Nullpunktsgeschwindigkeiten nur die gewöhnliche, nicht aber die sogen. „relativistische“ Formel angewandt werden, da ja bei einem jeden Neutron seine Masse als Ganzes unverändert gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ bleiben muß (freilich wird jetzt der

1) „Für die folgenden Überlegungen wird angenommen, daß die Neutronen den Regeln der Fermistatistik folgen und den Spin $\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$ besitzen. Diese Annahme wird notwendig sein, um die Statistik des Stickstoffkerns zu erklären, und entspricht den empirischen Ergebnissen über die Kernmomente“ (W. Heisenberg, ZS. f. Phys. 77, 1, 1932).

Nullpunktsdruck nicht $\frac{2}{3}$ der in einem ccm enthaltenen kinetischen Nullpunktsenergie betragen, sondern $\frac{1}{3}$).

Der Nullpunktsdruck des Neutronengases ist gleich

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 1,2531 \cdot 10^{-30} n^{5/3},$$

wenn man $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ und $c = 3 \cdot 10^{10}$ setzt. Es sei die in einem ccm enthaltene Nullpunktsenergie durch E bezeichnet. Bei gewöhnlichen Nullpunktsgeschwindigkeiten haben wir $E = \frac{3p}{2}$ zu setzen, und bei stark relativistischen: $E = 3p$. Danach ist die gewöhnliche Nullpunktsenergie eines einzelnen Neutrons gleich

$$\frac{E}{n} = \frac{3p}{2n} = 1,8797 \cdot 10^{-30} n^{2/3},$$

und die relativistische

$$\frac{E}{n} = \frac{3p}{n} = 3,7594 \cdot 10^{-30} n^{2/3}.$$

Die Dichte des Neutronengases ist $\varrho = n \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g. cm}^{-3}$, darum können wir schreiben:

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \cdot \frac{h^2 (1,66 \cdot 10^{-24} n)^{5/3}}{(1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}} = 5,3845 \cdot 10^9 \varrho^{5/3} = K \varrho^{5/3}.$$

Es möge ein solcher Neutronengasstern sich im Endstadium seiner Entwicklung (d. h. beim absoluten Nullpunkt seiner Temperatur) befinden, wobei wir der Einfachheit halber den Stern als homogen und die Neutronen als materielle Punkte annehmen wollen. Die Zahl der Neutronen pro ccm sei $n = 10^{12}$. Dann ist die Nullpunktsenergie eines jeden einzelnen Neutrons gleich

$$1,8797 \cdot 10^{-50} n^{2/3} = 1,88 \cdot 10^{-12} \text{ Erg (abgerundet),}$$

was einer Masse von

$$\frac{1,88 \cdot 10^{-22}}{c^2} = \frac{1,88 \cdot 10^{-22}}{9 \cdot 10^{20}} = 2,1 \cdot 10^{-43} \text{ g}$$

entspricht. Dies ist also der Zuwachs des Neutrons an kinetischer Masse. Da nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie die Gesamtmasse des Neutrons sich nicht verändern kann, so sind wir gezwungen ihm die verminderte Ruhemasse $1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-43}$ zuzuschreiben. Wir haben es hier also mit einer teil-

weisen Verwandlung von Materie in Energie zu tun, wobei die Gesamtmasse des Neutrons

$$2,1 \cdot 10^{-43} + (1,66 \cdot 10^{-24} - 2,1 \cdot 10^{-43}) = 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

konstant bleibt. Die Dichte des Neutronengases ist

$$\rho = n \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 10^{12} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 1,66 \cdot 10^{-12} \text{ g. cm}^{-3},$$

und der Nullpunktsdruck

$$p = K \rho^{5/3} = 5,3845 \cdot 10^9 (1,66 \cdot 10^{-12})^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{-10} \text{ Dyn. cm}^{-2}.$$

Aus Tabelle 3 können wir ersehen, daß wenn bei einem Neutronengasstern im abgekühlten Endstadium $n = 7,9224 \cdot 10^{39}$ ist, die Ruhemasse des Neutrons gleich Null wird. Dies bedeutet eine restlose Verwandlung von Materie in Energie. In diesem Falle ist der Nullpunktsdruck

$$p = K \rho^{5/3} = \frac{\rho c^2}{3},$$

also genau so wie bei der Hohlraumstrahlung.

Nehmen wir nun an, daß ein homogener Neutronengasstern im Verlaufe seines „Lebens“ die Hälfte seiner anfänglichen Masse ausgestrahlt hat, wobei aber die Zahl seiner Neutronen unverändert geblieben ist. Dies klingt vielleicht paradox, aber einen analogen Fall haben wir ja beim bekannten „Massendefekt“ der Atomkerne. Die Geschwindigkeiten der Neutronen und Protonen in den Atomkernen kann man schätzungsweise auf $\frac{c}{10}$ veranschlagen¹⁾. Wären die ursprünglichen Ruhemassen der Neutronen und der Protonen unverändert geblieben, so müßte sich ihre Gesamtmasse bei der Bildung des Kerns dank den erwähnten Geschwindigkeiten vergrößert haben. In Wirklichkeit tritt das genaue Gegenteil ein: nicht von einem Massenzuwachs ist die Bildung eines Atomkerns begleitet, sondern von einem Massendefekt. Also nicht nur die Ruhemasse, sondern sogar die Gesamtmasse hat sich vermindert, obgleich die ursprüngliche Zahl der Neutronen und Protonen bei der Kernbildung unverändert geblieben ist. Zwischen dem Massendefekt eines Atomkerns und dem Massendefekt unseres Sterns besteht nur ein quantitativer Unterschied: in dem ersteren Falle wird weniger als 1% der ursprünglichen Masse ausgestrahlt, in dem letzteren 50%; dabei bleibt die Zahl der Partikeln in beiden

1) E. Majorana, ZS. f. Phys. 82, 137, 1933.

Tabelle 3.

Die (homogenen) Neutronengassterne haben während ihres „Lebens“ keinen Massenverlust durch Ausstrahlung gehabt. Nullpunktsdruck des Neutronengases: $p = K\rho^{5/3} = 5,3845 \cdot 10^9 \rho^{5/3}$. Die Neutronen werden als materielle Punkte angesehen.

| Neutronenzahl pro cm im Endstadium verschiedener Sterne (bei 0 ⁰ abs.) | Nullpunkts- energie eines einzelnen Neutrons (in Erg) | Kinetischer Massen- zuwachs des Neutrons (in Gramm) | Ruhemasse des Neutrons (in Gramm) | Gesamt- masse des Neutrons (in Gramm) | Dichte des Neutronen- gases (in g.cm ⁻³) | Nullpunktsdruck des Neutronengases (in Dyn. cm ⁻²) |
|--|--|--|--|--|---|--|
| 10 ¹² | 1,88.10 ⁻²² | 2,1.10 ⁻⁴³ | 1,66.10 ⁻²⁴ — 2,1.10 ⁻⁴³ | 1,66.10 ⁻²⁴ | 1,66.10 ⁻¹² | $K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{-10} = 2,52 \cdot 10^{-10} \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 10 ²⁴ | 1,88.10 ⁻¹⁴ | 2,1.10 ⁻³⁵ | 1,66.10 ⁻²⁴ — 2,1.10 ⁻³⁵ | 1,66.10 ⁻²⁴ | 1,66 | $K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{10} = 2,52 \cdot 10^{11} \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 10 ³⁶ | 1,88.10 ⁻⁶ | 2,1.10 ⁻²⁷ | 1,6579.10 ⁻²⁴ | 1,66.10 ⁻²⁴ | 1,66.10 ¹² | $K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{30} = 2,52 \cdot 10^{-3} \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 10 ³⁹ | 1,88.10 ⁻⁴ | 2,1.10 ⁻²⁵ | 1,45.10 ⁻²⁴ | 1,66.10 ⁻²⁴ | 1,66.10 ¹⁵ | $K\rho^{5/3} = 1,25 \cdot 10^{35} = 0,252 \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 7,922.10 ³⁹ | 1,494.10 ⁻³ | 1,66.10 ⁻²⁴ | 0 | 1,66.10 ⁻²⁴ | 1,3151.10 ¹⁶ | $K\rho^{5/3} = 3,9453 \cdot 10^{36} = \frac{\rho c^2}{3}$ |

Fällen unverändert. In Tabelle 4 sind die entsprechenden Berechnungen für verschiedene Neutronengassterne durchgeführt. Da die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons nur die Hälfte des „normalen“ Wertes beträgt, so muß der Nullpunktsdruck für dasselbe ϱ doppelt so groß sein als im „normalen“ Falle. Dadurch ist Eddingtons Ansicht sogar noch „übertrumpft“.

Komplizierter ist der Fall, wenn der Stern aus einem Gemisch von Elektronen und Atomkernen besteht. Auch hier muß bei der Kontraktion die Zunahme an kinetischer Masse genau kompensiert sein durch gleichzeitige Abnahme an Ruhemasse, doch genügt es dem Gesetz der Erhaltung der Energie, wenn die Kompensation sich bloß auf das Gasgemisch als Ganzes bezieht. Der bei der Kontraktion hinzugekommene kinetische Massenzuwachs verteilt sich nicht gleichmäßig zwischen den Kernen und den Elektronen, sondern kommt fast ausschließlich den letzteren zugute, weil ja die Nullpunktsenergien sich umgekehrt proportional den Massen verteilen. Wenn der Stern nicht ganz besonders stark ausstrahlt, muß die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Elektrons trotz der Abnahme seiner Ruhemasse dennoch steigen, da ja bei ihm die Zunahme an kinetischer Masse unproportional groß ist. Dann dürfen wir aber den Nullpunktsdruck des Elektronengases nicht mehr nach $p = K\varrho^{5/3}$ berechnen, sondern haben es hier mit einer relativistischen Entartung im gewöhnlichen Sinne des Wortes zu tun. Die Elektronenmasse darf jedoch nicht unbegrenzt wachsen, weil ja sonst die Gesamtmasse des Gasgemisches als Ganzes auf die Dauer nicht konstant bleiben könnte, wie dies vom Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt wird. (Strahlt der Stern aus, so verlangt das Gesetz der Erhaltung der Energie sogar Verringerung der Gesamtmasse des Gasgemisches.) Es ist nicht schwer einzusehen, daß der Unterschied zwischen der Gesamtmasse eines einzelnen Elektrons und derjenigen eines Kerns immer geringer wird. Bei fortschreitender Kompression muß daher die Formel $p = K\varrho^{5/3}$ schließlich wieder angewandt werden. In dem äußersten Falle, wo die gesamte Ruhemasse in kinetische übergegangen ist, haben wir $p = K\varrho^{5/3} = \varrho c^2$.

Es bewege sich ein Lichtquant, dessen Ruhemasse man gleich Null annehmen kann, gegen einen Himmelskörper. Da die Bewegung des Lichtquants in der Richtung der Gravitationskraft stattfindet, so muß seine kinetische Energie wachsen

Tabelle 4.

Die (homogenen) Neutronengassterne haben während ihres „Lebens“ die Hälfte ihrer Masse ausgestrahlt, ohne dabei die anfängliche Zahl ihrer Neutronen zu verändern. Dies bedeutet, daß am Ende des „Lebens“ eines Sterns die Gesamtmasse eines einzelnen Neutrons nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$, sondern nur $\frac{1}{2} \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} = 8,3 \cdot 10^{-25}$ g beträgt. Die Ruhemasse muß natürlich noch kleiner sein. Der Nullpunktsdruck des Neutronengases ist jetzt $p = K \rho^{5/3} = 3,4190 \cdot 10^{10} \rho^{5/3}$. Die Neutronen werden als materielle Punkte angesehen.

| Neutronenzahl pro cm im Endstadium verschiedener Sterne (bei 0° abs.) | Nullpunkts- energie eines einzelnen Neutrons (in Erg) | Kinetischer Massen- zuwachs des Neutrons (in Gramm) | Ruhemasse des Neutrons (in Gramm) | Gesamt- masse des Neutrons (in Gramm) | Dichte des Neutronen- gases (in g. cm ⁻³) | Nullpunktsdruck des Neutronengases (in Dyn. cm ⁻²) |
|--|--|--|---|--|--|---|
| 10^{12} | $3,76 \cdot 10^{-22}$ | $4,2 \cdot 10^{-43}$ | $8,3 \cdot 10^{-25} - 4,2 \cdot 10^{-43}$ | $8,3 \cdot 10^{-25}$ | $8,3 \cdot 10^{-13}$ | $K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{-10} = 1,01 \cdot 10^{-18} \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 10^{24} | $3,76 \cdot 10^{-14}$ | $4,2 \cdot 10^{-35}$ | $8,3 \cdot 10^{-25} - 4,2 \cdot 10^{-35}$ | $8,3 \cdot 10^{-25}$ | 0,83 | $K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{10} = 1,01 \cdot 10^{-10} \frac{\rho c^2}{3}$ |
| 10^{36} | $3,76 \cdot 10^{-6}$ | $4,2 \cdot 10^{-27}$ | $8,258 \cdot 10^{-25}$ | $8,3 \cdot 10^{-25}$ | $8,3 \cdot 10^{11}$ | $K \rho^{5/3} = 2,51 \cdot 10^{30} = 0,0101 \frac{\rho c^2}{3}$ |
| $9,9030 \cdot 10^{38}$ | $7,47 \cdot 10^{-4}$ | $8,3 \cdot 10^{-25}$ | 0 | $8,3 \cdot 10^{-25}$ | $8,2195 \cdot 10^{14}$ | $K \rho^{5/3} = 2,4659 \cdot 10^{35} = \frac{\rho c^2}{3}$ |

auf Kosten der potentiellen Energie. Mit anderen Worten: die Zunahme an kinetischer Masse muß durch Abnahme an Ruhemasse genau kompensiert werden. Da aber die Ruhemasse des Lichtquants bereits am Anfang gleich Null war, muß sie bei der Bewegung gegen den Stern (also beim Fallen auf den Stern) negativ werden.

Die Idee einer negativen Masse und Energie ist nicht neu: „Bereits der klassischen relativistischen Mechanik war die Existenz von zwei Klassen von Lösungen der Bewegungsgleichungen bekannt, die den beiden Vorzeichen der „Energie der Ruhemasse“, $\pm mc^2$ entsprechen und gelegentlich als Lösung mit positiver und „negativer“ Masse gedeutet wurden. Teilchen mit negativer Gesamtenergie (oder „negativer Masse“) haben sehr merkwürdige Eigenschaften und sind niemals beobachtet worden“¹⁾.

Wir behaupten aber auch gar nicht, daß die Gesamtmasse (resp. Gesamtenergie) eines Lichtquants negativ werden könne, sondern nur seine Ruhemasse (resp. Ruheenergie).

Bekanntlich spielt die Idee einer negativen Energie eine wesentliche Rolle in Dirac's Theorie des Positrons. Aber auch schon vor der Entdeckung des Positrons rechnete Dirac mit der Möglichkeit negativer Massen und Energien²⁾.

Gewöhnlich meint man, daß beim Verlassen eines Himmelskörpers die Gesamtenergie des Lichtquants teilweise (oder sogar vollständig) zur Überwindung der Gravitationskraft „aufgebraucht“ werde. Nach unserer Auffassung hingegen wird die Abnahme an kinetischer Masse genau kompensiert durch die Zunahme an Ruhemasse. Wir sind daher der Meinung, daß die bekannte „Rotverschiebung“ der Spektrallinien an der Oberfläche des betreffenden Sternes genau so stark ist, wie in grösseren Entfernungen. Eine negative Ruhemasse würde dem Lichtquant gestatten, eine Gravitationspotentialdifferenz von mehr als c^2 zu überwinden. Nehmen wir z. B. an, daß das Gravitationspotential an der Oberfläche eines Sterns den phantastischen Wert

$$\frac{GM}{R} = -1000 c^2$$

1) G. Gamow, „Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität“, ins Deutsche übertragen von C. u. F. Houtermans, S. 4, Leipzig 1932.

2) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London (A) **126**, 361 f., 1930.

besitze. Von der Oberfläche dieses phantastischen Sterns werde ein Lichtquant emittiert, dessen anfängliche kinetische Energie $+1,001 \cdot 10^{-5}$ Erg und dessen anfängliche Ruhemasse $-\frac{10^{-5}}{c^2}$ g betrage. Letztere repräsentiert eine (negative) Energie von -10^{-5} Erg, so daß die anfängliche Gesamtenergie des Lichtquants gleich

$$1,001 \cdot 10^{-5} - 10^{-5} = 0,001 \cdot 10^{-5} = 10^{-8} \text{ Erg}$$

ist, was einer Masse von $\frac{10^{-8}}{c^2}$ g entspricht. Soll sich das Lichtquant von der Oberfläche des phantastischen Sterns in die Unendlichkeit entfernen, so muß eine Potentialdifferenz von $1000 c^2$ überwunden werden, wozu ein Arbeitsaufwand von

$$\frac{10^{-8}}{c^2} \cdot 1000 c^2 = 10^{-5} \text{ Erg}$$

notwendig ist. Diese Arbeit kann nur auf Kosten der anfänglichen kinetischen Energie $1,001 \cdot 10^{-5}$ Erg geschehen, weshalb in unendlicher Entfernung die kinetische Energie des Lichtquants bloß

$$1,001 \cdot 10^{-5} - 10^{-5} = 10^{-8} \text{ Erg}$$

betragen wird. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt nun, daß der Verlust von 10^{-5} Erg kinetischer Energie durch eine gleichgroße Erhöhung der potentiellen Energie aufgewogen werde. Wir interpretieren eine Erhöhung der potentiellen Energie um 10^{-5} Erg als Vergrößerung der Ruhemasse des Lichtquants um $\frac{10^{-5}}{c^2}$ g. Somit ist die Ruhemasse des Lichtquants in der Unendlichkeit gleich

$$-\frac{10^{-5}}{c^2} + \frac{10^{-5}}{c^2} = 0,$$

während die kinetische Energie, wie wir oben gesehen haben, gleich 10^{-8} Erg ist, was einer Masse von $\frac{10^{-8}}{c^2}$ g entspricht. Daraus sehen wir, daß die Gesamtmasse des Lichtquants in unendlicher Entfernung

$$\frac{10^{-8}}{c^2} + 0 = \frac{10^{-8}}{c^2} \text{ g}$$

beträgt, was einer Gesamtenergie von 10^{-8} Erg entspricht; dies ist aber genau derselbe Wert wie am Anfang der Bewegung. Entfernt sich also von der Ober-

fläche des Sterns ein Lichtquant, so nimmt seine kinetische Energie ab und seine Ruheenergie zu. Die Gesamtenergie des Lichtquants bleibt aber die ganze Zeit unveränderlich.

Kehren wir noch einmal zu der oben erwähnten relativistischen Rotverschiebung der Spektrallinien zurück. Diese Rotverschiebung wird gewöhnlich folgendermaßen interpretiert. Damit ein Lichtquant $h\nu$ sich von der Oberfläche eines Sterns bis zur Unendlichkeit entfernen kann, muß es den Gravitationspotentialunterschied $\frac{GM}{R}$ überwinden, wozu eine Energiemenge von $\frac{h\nu}{c^2} \cdot \frac{GM}{R}$ Erg notwendig ist. Dieser Arbeitsaufwand könne nur auf Kosten der ursprünglichen Energie $h\nu$ geschehen, weshalb die Schwingungsfrequenz sich von ν bis ν' verringern müsse nach der Gleichung

$$h\nu' = h\nu - \frac{h\nu}{c^2} \cdot \frac{GM}{R} = h\nu \left(1 - \frac{GM}{Rc^2}\right),$$

also nach:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{GM}{Rc^2}. \quad (80)$$

Unter ν' und ν kann man in (80) sowohl die „Schwingungszahlen“ (sec^{-1}) als auch die ihnen proportionalen „Wellenzahlen“ (cm^{-1}) verstehen.

Eine solche Interpretation der Rotverschiebung widerspricht jedoch dem Gesetz der Erhaltung der Energie. Die Abnahme an kinetischer Masse muß durch eine gleichzeitige Zunahme an Ruhemasse genau kompensiert sein, weshalb die Gesamtmasse des Lichtquants bei seiner Bewegung unverändert bleibt. Da die Gesamtmasse des Lichtquants (im Gegensatz zu der Masse eines sich langsam bewegendem materiellen Körpers) rein kinetischer Natur ist, so darf sich bei der Bewegung des Lichtquants seine Gesamtenergie (und nur diese allein ist der Beobachtung zugänglich) ebenfalls nicht ändern. Eine „Rotverschiebung“ könnte deshalb nicht zustande kommen.

Wir interpretieren die Rotverschiebung auf eine ganz andere Weise.

Wenn ein Elektron (mit der anfänglichen Ruhemasse m_e) aus der Unendlichkeit auf einen Stern fällt, so ist nahe dessen Oberfläche die kinetische Energie des Elektrons gleich $\frac{m_e GM}{R}$ Erg, was einen kinetischen Massenzuwachs von $\frac{m_e GM}{Rc^2}$ g

repräsentiert. Das Gesetz der Erhaltung der Energie verlangt nun, daß dieser Zuwachs durch eine gleichgroße Verringerung der Ruhemasse kompensiert werde. Somit beträgt die Ruhemasse des Elektrons nahe der Sternoberfläche nicht mehr m_e , sondern nur

$$m'_e = m_e - \frac{m_e GM}{R c^2} = m_e \left(1 - \frac{GM}{R c^2} \right),$$

und dies ergibt:

$$\frac{m'_e}{m} = 1 - \frac{GM}{R c^2}. \quad (81)$$

Es möge E die Kernladung eines „wasserstoffähnlichen“ Atoms sein. Die Bewegungsgeschwindigkeit seines Elektrons ist im Vergleich mit c gewöhnlich so klein, daß man die Masse des bewegten Elektrons gleich seiner Ruhemasse setzen kann (wenn man die „Feinstruktur“ vernachlässigt). Springt nun das Elektron von der n_1 -Quantenbahn auf die niedrigere n_2 -Quantenbahn über, so kann bekanntlich die Wellenzahl des emittierten Lichtquants folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\nu = \frac{2 \pi^2 m_e e^2 E^2}{c h^3} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right).$$

Dies ist aber nur für ein Atom richtig, welches unendlich weit von dem Stern entfernt ist. Wenn dagegen dasselbe Atom sich nahe der Sternoberfläche befindet, so haben wir offenbar:

$$\nu' = \frac{2 \pi^2 m'_e e^2 E^2}{c h^3} \left(\frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1} \right).$$

Die beiden letzten Gleichungen ergeben:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{m'_e}{m_e}. \quad (82)$$

Aus (81) und (82) erhalten wir:

$$\frac{\nu'}{\nu} = 1 - \frac{GM}{R c^2}. \quad (83)$$

Der Vergleich mit (80) zeigt nun, daß unsere neue Auffassung genau dieselbe „Rotverschiebung“ ergibt wie die traditionelle. Der einzige Unterschied besteht nur darin, daß unsere neue Interpretation der „Rotverschiebung“ sich im vollen Einklange mit dem Gesetz der Erhaltung der Energie befindet, während die traditionelle Interpretation mit diesem Gesetz unvereinbar ist.

E. A. Milne's Ansicht über das „Massen-Helligkeitsgesetz“. Kritik dieser Ansicht.

Die Beobachtungen zeigen, daß zwischen der Masse eines Sternes und seiner absoluten bolometrischen Helligkeit zweifellos ein Zusammenhang besteht: mit zunehmender Masse nimmt die absolute Helligkeit ebenfalls zu, und zwar sehr schnell, so daß annähernd $L \sim M^3$ ist¹⁾. Milne ist der Ansicht, daß ein „Massen-Helligkeitsgesetz“ niemals aus blossen Gleichgewichtsbetrachtungen abgeleitet werden könne: „The observed mass-luminosity law must depend on the circumstance that in some way the more massive star contrives to provide itself with a stronger set of sources. The claim to establish the mass-luminosity law from equilibrium considerations only appears to me a philosophical blunder“²⁾. Dies ist vollständig richtig, solange wir die Energiequelle in irgendeinem unbekannten Prozeß suchen: dann bleibt tatsächlich nichts übrig, als L und M für unabhängige Größen zu erklären. Anders liegt die Sache, wenn man die Gravitationsenergie als die Hauptquelle der Sternenenergie ansieht. Zur Illustration sei folgendes konkrete Beispiel angeführt.

Es befinde sich Wasser in einem Gefäß mit einem Krahn, der unten angebracht ist. Solange letzterer geschlossen ist, kann kein Wasser herausfließen, also auch keine Arbeit geleistet werden. Der Energieinhalt des Gefäßes bleibt konstant (in potentieller Form). Öffnet man den Krahn, aber nicht weit, so beginnt das Wasser langsam herauszuströmen und kann Arbeit verrichten, wobei die potentielle Energie im Gefäß sich verringert. Je weiter man den Krahn öffnet, desto mehr Arbeit wird das herausfließende Wasser in der Zeiteinheit leisten, aber desto schneller ist auch der Energievorrat erschöpft.

Unserer Meinung nach findet genau dasselbe auch bei den Sternen statt, wobei der Absorptionskoeffizient die Rolle des Krahns spielt. Um sich zu verdichten, muß der Stern die überschüssige innere Energie ausstrahlen. Dies kann er aber nicht, wenn der Absorptionskoeffizient unendlich groß ist (= Krahn geschlossen). Die potentielle Gravitationsenergie bleibt daher unverändert. Der irdische Beobachter würde den Schluß ziehen,

1) Vgl. J. H. Jeans, „Astronomy and Cosmogony“, S. 126, Cambridge 1928.

2) E. A. Milne, Nature **127**, 16, 1931.

daß dieser Stern überhaupt keine Energiequellen besitze, da er ja nicht ausstrahle. Ist der Absorptionskoeffizient zwar groß, aber endlich (= Krahn geöffnet, aber nicht weit), so wird die strahlende Energie nach außen strömen, wenn auch langsam. Der irdische Beobachter wird meinen, daß die Energiequellen des Sternes sehr klein seien. Natürlich findet jetzt beim Stern eine Kontraktion statt, aber eine sehr langsame. Ist der Absorptionskoeffizient sehr klein (= Krahn weit geöffnet), so geht der Kontraktionsprozeß schnell vor sich und ist die Ausstrahlung sehr intensiv. Nach Ansicht des irdischen Beobachters muß solch ein Stern sehr starke Energiequellen besitzen.

Die Höhe des Wasserstandes im Gefäß und die Weite der Krahnöffnung gestatten die Arbeitsleistung des herausfließenden Wasserstrahls genau zu berechnen. In analoger Weise ließe sich die Ausstrahlung eines Sternes genau berechnen, wenn der Absorptionskoeffizient und der Aufbau dieses Sternes genau bekannt wären. Ehe wir aber diese Frage weiter untersuchen, müssen wir die modernen Ansichten über den Bau der Atomkerne erwähnen.

Moderne Ansichten über den Bau der Atomkerne.

Früher wurde angenommen, daß die Atomkerne aus Protonen und Elektronen aufgebaut seien. Nach der heutigen Ansicht sind Protonen und Neutronen die einzigen Bausteine der Atomkerne, wobei freilich die Erklärung der β -Strahlung gewisse Schwierigkeiten bereitet: „Wenn der Kern nur aus Protonen und Neutronen besteht, dann müssen die beim β -Zerfall emittierten Elektronen beim Zerfallsprozeß erst entstehen“¹⁾.

Anfänglich betrachtete man die Neutronen als komplizierte Gebilde und die Protonen als einfache; heute neigt man der entgegengesetzten Ansicht zu: „Chadwick first assumed that the neutron consisted of a close combination of a proton and an electron... But the experiments of Curie... Curie and Joliot... Chadwick... suggest that the neutron is a simple particle, being the fundamental nuclear unit, the proton consisting of a close combination of a neutron and a positive electron“²⁾. Der Radius des Neutrons kann nach Rabi gleich

1) C. F. v. Weizsäcker, Phys. ZS. **36**, 784, 1935.

2) Harold J. Walker, Phil. Mag. (7) **19**, 344 f., 1935.

$1,31 \cdot 10^{-13}$ cm angenommen werden¹⁾, er ist also merklich kleiner als der „klassische“ Radius des Elektrons. Was die Masse des Neutrons anbelangt, so erweist sie sich nach den neuesten Messungen als etwas größer denn diejenige des Protons. Nach Oliphant, Kempton und Lord Rutherford ist 1,0083 das Atomgewicht des Neutrons und 1,0081 dasjenige des Protons²⁾. Bethe leitet 1,0085 für das Neutron ab und 1,00807 für das Proton³⁾. Die allerneueste und wohl zuverlässigste Bestimmung rührt von Wilson her⁴⁾. Das Atomgewicht des Neutrons berechnet er zu 1,00833 und dasjenige des Protons zu 1,00791; oder auch (indem er von einem etwas anderen Atomgewicht des Heliums ausgeht) zu 1,00830 und 1,00789. Wenn nun das Proton aus einem Neutron und einem Positron besteht, so kann man auf Grund des „Massendefekts“ die Bindungsenergie berechnen. Benutzt man Wilsons Daten, so erhält man für die Bindungsenergie des Protons $0,88 \cdot 2m_e c^2$, wo m_e die Masse des Elektrons (oder des Positrons) bedeutet. Ist nun die Energie des einfallenden Strahlungsquants etwas größer als diese Bindungsenergie, ist sie also ungefähr $2m_e c^2$, so kann das Proton unter Ausscheidung eines Positrons zertrümmert werden (wobei ein Neutron nachbleibt). Nun befinden sich die Protonen in den Atomkernen. Damit das Atom, in dessen Kern ein Proton zertrümmert wird, elektrisch neutral bleibe, muß die Ausscheidung eines Positrons immer von der Ausscheidung eines Elektrons begleitet sein. Ob letztere Ausscheidung auf Kosten der äußeren Atomelektronen geschieht, oder ob eine Art β -Strahlung des Kerns angeregt wird, ist für die Aufrechterhaltung der elektrischen Neutralität des Atoms völlig gleichgültig. Die Beobachtungen zeigen nun, daß tatsächlich bei $h\nu \geq 2m_e c^2$ Positronen in Begleitung von Elektronen ausgeschieden werden. Man könnte darin den Beweis der komplexen Natur des Protons erblicken. Unglücklicherweise verlangt aber auch die Theorie von Dirac, daß bei $h\nu \geq 2m_e c^2$ Positronen und Elektronen ausgeschieden werden, doch erklärt sie diese Erscheinung ganz anders. Nach Dirac

1) I. I. Rabi, Phys. Rev. (2) **43**, 838, 1933.

2) M. L. E. Oliphant, A. E. Kempton und Lord Rutherford, Proc. Roy. Soc. London (A) **150**, 253, 1935.

3) H. Bethe, Phys. Rev. (2) **47**, 634, 1935.

4) H. A. Wilson, Proc. Roy. Soc. London (A) **152**, 501, 1935.

entsteht ein Positron und ein Elektron direkt aus einem Strahlungsquant.

Nach welchem Kriterium könnte man aber entscheiden, ob die beobachteten „Paare“ im Sinne Diracs zu deuten seien oder der Protonenzertrümmerung ihre Entstehung verdanken? Wie soll man eine „Differentialdiagnose“ stellen?

Die der Zertrümmerung unterliegenden Protonen befinden sich im Atomkern, welcher also von dem Energiequant $h\nu$ unmittelbar getroffen werden muß. Die Wahrscheinlichkeit der Zertrümmerung ist bei homogener Strahlung offenbar proportional der Zahl der einfallenden Energiequanten pro Sekunde, d. h. proportional dem Strahlungsdruck. Nun ist der Kerndurchmesser gewöhnlich viel kleiner als die Wellenlänge der einfallenden Strahlung. Ist aber der Radius a einer Kugel sehr viel kleiner als die einfallende Wellenlänge λ , so muß nach Schwarzschild das Verhältnis des Strahlungsdruckes D zur Strahlungsdichte E gleich

$$\frac{D}{E} = \frac{224}{3} \pi^5 \frac{a^6}{\lambda^4} \quad (84)$$

sein¹⁾. Somit ist bei konstantem λ und E der Strahlungsdruck, also auch die Wahrscheinlichkeit der Protonenzertrümmerung, proportional der 6. Potenz des Radius, d. h. proportional dem Quadrate des Volumens, oder auch annähernd dem Quadrate der Kernmasse²⁾. Nun ist die Kernmasse annähernd proportional der Kernladung. Daraus folgt, daß die Wahrscheinlichkeit einer Protonenzertrümmerung annähernd proportional dem Quadrate der Kernladung sein muß. Man könnte dies noch so formulieren: der Wirkungsquerschnitt für die „Paarbildung“ (wir haben ja oben gesehen, daß die Auslösung eines Positrons immer von der gleichzeitigen Auslösung eines Elektrons aus demselben Atom begleitet sein muß) pro Atomkern ist proportional dem Quadrate der Kernladungszahl.

Unglücklicherweise ist der Wirkungsquerschnitt für die Paarbildung nach Dirac ebenfalls proportional dem Quadrate der

1) K. Schwarzschild, Sitzungsberichte der mathem.-phys. Classe der k. b. Akademie der Wiss. zu München **31**, 331, 1901.

2) Bei allen Kernen haben wir es mit einer recht dichten Packung von Protonen und Neutronen zu tun. Darum werden die in verschiedenen Atomkernen herrschenden Dichten (g.cm^{-3}) ziemlich gleich sein. Bei gleicher Dichte sind aber die Volumina proportional den Massen.

Kernladungszahl¹⁾, so daß diese Erscheinung nicht für eine „Differentialdiagnose“ benutzt werden kann.

Nach (84) muß für ein und denselben Kern der Wirkungsquerschnitt für unsere „Paarbildung“ (durch Protonenzertrümmerung) umgekehrt proportional λ^4 sein, also direkt proportional ν^4 oder auch $(h\nu)^4$. Was sagt nun das Experiment?

Vor kurzem haben Jaeger und Hulm folgende Tabelle aufgestellt:

| $\frac{h\nu}{mc^2}$ | $\sigma \times 10^{24}$ | $\sigma \times 10^{24}$ |
|---------------------|-------------------------|-------------------------|
| 3 | 0,67 | 0,34 |
| 5,2 | 3,1 | 2,5 |

Hier bedeutet σ den Wirkungsquerschnitt des Bleiatomkerns für die „Paarbildung“²⁾. In der zweiten Kolumne sind ihre eigenen Messungsergebnisse angegeben und in der dritten (zum Vergleich) diejenigen von Bethe und Heitler. Zu ihrer Tabelle bemerken Jaeger und Hulm: „The values for $5mc^2$ are not so accurate as could be desired... The error in σ , however, should not be more than about 10%“. Die zweite Kolumne ergibt für das Verhältnis beider Querschnitte: $\frac{0,67}{3,1} = 0,216$, und die dritte: $\frac{0,34}{2,5} = 0,136$. Sollte hingegen die Paarbildung durch Protonenzertrümmerung bedingt sein, so müßte das Verhältnis der Wirkungsquerschnitte gleich $\left(\frac{3}{5,2}\right)^4 = 0,111$ sein. Diese Zahl ist zu 0,136 näher als 0,136 zu 0,216. Es läßt sich daher nicht mit Bestimmtheit behaupten, daß die Experimente gegen die Paarbildung durch Protonenzertrümmerung entschieden haben.

Die Formel (84) gilt nur solange die einfallende Wellenlänge bedeutend größer als der Kerndurchmesser ist. Im umgekehrten Falle ist kein Grund vorhanden, weshalb bei noch weiterer Verringerung der Wellenlänge der „Wirkungsquerschnitt“ wachsen sollte. Im Gegenteil: er wird sogar abnehmen, weil bei abnehmender Wellenlänge ein immer größerer Teil der Lichtquantenenergie für die Erteilung von Compton-Geschwin-

1) „The cross-section is proportional to the square of the atomic number“ [H. Bethe und W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 110, 1934].

2) J. C. Jaeger und H. R. Hulme, Proc. Roy. Soc. London (A) **153**, 446, 1936.

digkeiten verbraucht wird. Sobald also die Wellenlänge des einfallenden Lichtquants mit dem Kerndurchmesser vergleichbar wird, versagt unsere auf der Formel (84) begründete Theorie. Da die Experimente gewöhnlich mit schweren Kernen gemacht werden, etwa mit Bleiatomkernen, so wollen wir den Durchmesser $2r_0$ eines solchen Kerns berechnen. Dies können wir auf Grund folgender von Nakabayasi¹⁾ unlängst aufgestellten Formel tun:

$$r_0 = 1,397 n^{1/3} (1 + 0,0137 n_2^2 n^{-4/3}) 10^{-13} \text{ cm.} \quad (85)$$

Hier bedeutet n_2 die Zahl der Protonen im Kern, und n die sogen. „Massenzahl“ (Zahl der Protonen + Zahl der Neutronen). Beim Bleiatomkern ist $n_2 = 82$, und n ist für verschiedene Bleiisotope etwas verschieden. Wir wählen naturgemäß den häufigsten (Häufigkeit = 49,55%), dessen Massenzahl gleich $n = 208$ ist²⁾. Mit diesen Werten von n_2 und n erhalten wir aus (85):

$$2r_0 = 1,7792 \cdot 10^{-12} = \lambda,$$

wo λ die „kritische“ Wellenlänge bedeutet. Die Energie des entsprechenden „kritischen“ Lichtquants läßt sich zu

$$h\nu = 135,85 m_e c^2$$

berechnen, wenn man nach Birge³⁾ $\frac{h}{c} = 2,18381 \cdot 10^{-37}$ setzt und für m_e den „spektroskopischen“ Wert $9,03510 \cdot 10^{-28}$ akzeptiert. Der „Deflexionswert“ $8,99425 \cdot 10^{-28}$ hingegen ergibt:

$$h\nu = 136,47 m_e c^2.$$

Unglücklicherweise verhält sich auch Dirac's Theorie der Paarbildung sehr ähnlich: „It should, however, be considered that for $h\nu > 137 mc^2$ the quantum theory will go wrong, as it does for the radiation of fast electrons. It is to be expected that, as a consequence, the absorption coefficient for quanta of energy greater than $137 mc^2$ will decrease again... *Note added in proof...* In a recently published paper v. Weizsäcker... came to the conclusion that the theoretical results reached in

1) Kugao Nakabayasi, ZS. f. Phys. **97**, 217, 1935.

2) Landolt-Börnstein, Physikalisch-chem. Tabellen, 3. Ergänzungsband, 1. Teil, S. 29, Berlin 1935.

3) Raymond T. Birge, „Probable Values of the General Physical Constants“, Physical Rev. (Supplement) **1**, 62, 1929.

this paper should be valid also for energies $> 137 mc^2$. If this result should be correct it would be hardly possible to reconcile it with the experiments mentioned¹⁾.

Ich persönlich bin trotz alledem der Meinung, daß der größte Teil der beobachteten „Paare“ im Sinne Dirac's zu deuten sei. Ein kleiner Prozentsatz der Paare wird hingegen der Protonenzertrümmerung seine Existenz zu verdanken haben. Beide Gruppen zu trennen ist jedoch wegen ihres zu ähnlichen Verhaltens praktisch unmöglich.

Ein Strahlungsquant kann nur bei genügender Bremsung seiner translatorischen Bewegung in ein Positron und ein Elektron zerfallen. Ohne eine solche Bremsung müßte nach einem Grundsatz der Mechanik auch nach dem Zerfall der gemeinsame Schwerpunkt des entstandenen „Paares“ mit der früheren Lichtgeschwindigkeit c sich in der früheren Richtung fortbewegen. Wenn sich aber ein Elektron oder ein Positron mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, so wird die Elektronen-, resp. Positronenmasse unendlich groß. Ich halte es daher für unmöglich, daß ein Strahlungsquant bereits in größerer Entfernung vom Atomkern zerfalle. Es sei denn, daß die Ruhemassen des Elektrons und des Positrons gleich Null oder negativ sind.

(Hinzugefügt bei der Korrektur.) Soeben hat Oliphant einen neuen Aufsatz veröffentlicht²⁾, wonach das Atomgewicht des Protons 1,0081 beträgt und dasjenige des Neutrons 1,0091. Dazu bemerkt Oliphant: „The mass found for the neutron is much greater than has generally been assumed, as it is heavier than the hydrogen atom by approximately the mass of two electrons, or heavier than the proton by almost three times the mass of the electron“. Wenn diese Zahlen richtig sind, so kann ein Proton erst dann durch ein Lichtquant zertrümmert werden, wenn die Energie des letzteren $h\nu > 3 m_e c^2$ ist. Andererseits wird durch diese Zahlen der endgültige Beweis erbracht, daß ein Neutron unmöglich aus einem Proton und einem Elektron bestehen kann. Jede stabile Bindung muß ja von einem Massendefekt begleitet sein; wir hätten aber statt dessen einen Massenzuwachs!

1) H. Bethe und W. Heitler, Proc. Roy. Soc. London (A) **146**, 111, 1934.

2) M. L. Oliphant, Nature **137**, 396, 1936.

Über die Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Atomkerne im Inneren der Sterne.

Preßt man ein Gas so stark zusammen, daß die gegenseitigen Entfernungen der Nachbaratome mit den Durchmessern dieser Atome vergleichbar werden, so tritt selbst beim absoluten Nullpunkt der Temperatur „mechanische“ Ionisation ein. Die Atomstrukturen brechen zusammen und es bildet sich ein Gemisch von Elektronen und Kernen. Fowler betrachtet den entsprechenden Stern, wie wir oben gesehen haben, als ein Riesenmolekel. Zur Entfernung eines Elektrons von einem Kern braucht jetzt so gut wie gar keine Arbeit angewandt zu werden. Das Auftreten der mechanischen Ionisation ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Ionisationspotentials.

Komprimiert man aber ein solches Gas immer weiter und weiter, so muß schliesslich eine „mechanische“ Dissoziation der Kerne eintreten. Jetzt ist nicht nur die Struktur der Atome, sondern sogar die Struktur der Kerne zusammengebrochen. Die unter gewöhnlichen Bedingungen so gewaltige Bindungsenergie der Kerne ist jetzt gleich Null. Unser Gas stellt jetzt ein gleichmäßiges Gemisch von Neutronen, Protonen und Elektronen dar, welche sich frei umherbewegen. Das Verschwinden der Bindungsenergie der Kerne unter dem gewaltigen Druck ist völlig analog dem Verschwinden der latenten Verdampfungswärme des Wassers unter dem „kritischen“ Druck von 225 Atm. Der entsprechende Stern stellt nicht mehr eine Riesenmolekel dar, sondern einen riesigen Atomkern. Der einzige qualitative Unterschied zwischen diesem Riesenkern und den gewöhnlichen Kernen besteht darin, daß letztere positiv geladen sind, während unser Riesenkern elektrisch neutral ist (wegen der beigemischten Elektronen). Dieser Riesenkern enthält eine große Menge gewöhnlicher Kerne im Zustande der mechanischen Dissoziation. Neuerdings kennen wir aus der Physik auch tatsächlich einen Fall, wo ein größerer Kern kleinere im Zustande der mechanischen Dissoziation enthält. Das Emittieren von α -Partikelchen zwingt uns zu der Annahme, daß sich diese α -Partikelchen in den größeren Atomkernen befinden. Das α -Partikelchen besteht nach den modernen Ansichten aus 2 Protonen und 2 Neutronen, und stellt den Kern des Heliumatoms dar. Nun sagt aber Heisenberg über die Existenz von Heliumkernen in größeren Atom-

kernen: „Gegen die ausgesprochene Vermutung sprechen aber andere schwerwiegende Argumente: In den genauer bekannten Massendefekten der leichteren Kerne ist von einer Periodizität mit der Zahl 4 im Atomgewicht kaum etwas zu bemerken. Auch die Systematik der Isotope deutet vielleicht eher auf die Existenz von Protonen- und Neutronenschalen als auf die Existenz von α -Teilchen hin“¹⁾. Weizsäcker sagt: „Dagegen liefert das Ergebnis keinen Hinweis auf eine ausgezeichnete Rolle der α -Teilchen im Kern. Man wird daher die α -Teilchen nicht als „Moleküle“ der „Kernflüssigkeit“ betrachten dürfen. Soweit solche anschauliche Analogien zulässig sind, muß man eher sagen, daß die α -Teilchen in der Kernflüssigkeit zum größten Teil dissoziiert sind und daß die Protonen und Neutronen in ihr zwar durch dieselben Kräfte gebunden sind, die für die Stabilität des α -Teilchens maßgebend sind, daß sie aber nur vorübergehend mit ihren Nachbarn zu α -Teilchen zusammentreten“²⁾. Weizsäcker spricht also direkt von einer Dissoziation der Heliumkerne in den größeren Kernen. Die entsprechenden Beobachtungen und Experimente sind bei Zimmertemperatur gemacht worden, oder jedenfalls bei einer Temperatur, wo von irgendeiner „thermischen“ Dissoziation der Heliumkerne überhaupt keine Rede sein kann (dazu wären ja Milliarden von Graden nötig!). Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß auch beim absoluten Nullpunkt der Temperatur die Heliumkerne in den größeren Kernen dissoziiert bleiben. Wenn so, so haben wir es hier nicht mit thermischer, sondern mit „mechanischer“ Dissoziation zu tun³⁾.

1) W. Heisenberg, ZS. f. Phys. **96**, 474, 1935.

2) C. F. v. Weizsäcker, Phys. ZS. **36**, 782 f., 1935.

3) Man könnte vielleicht einwenden, daß die „makroskopische“ Temperatur des Gases mit der „mikroskopischen“ der Kerne nicht identisch sei. Vielleicht haben die Kerne bei makroskopischer Zimmertemperatur des Gases eine mikroskopische „wahre“ Eigentemperatur von einer Milliarde Grad? — Dagegen ist zu bemerken, daß eine „wahre“ Temperatur von einer Milliarde Grad jeden isolierten Kern (sagen wir vom Radius $r_0 = 4 \cdot 10^{-13}$ cm) zu einer enormen Ausstrahlung veranlassen müßte, nämlich zu

$$4 \pi r_0^2 \sigma T^4 = 4 \pi (4 \cdot 10^{-13})^2 \cdot 5,7 \cdot 10^{-5} (10^9)^4 = 1,15 \cdot 10^8 \text{ Erg. sec}^{-1},$$

was einem Massenverlust von

$$1,15 \cdot 10^8 / (3 \cdot 10^{10})^2 = 1,28 \cdot 10^{-13} \text{ g. sec}^{-1}$$

entspricht. Größere Kerne werden noch mehr ausstrahlen. Nun beträgt die

Somit ist die prinzipielle Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Kerne als experimentell bewiesen zu betrachten.

Das neue Sternmodell.

Man darf nicht denken, daß eine vollständige Auflösung der Kerne in ihre Bestandteile nur beim absoluten Nullpunkt möglich sei: sie kann bei jeder beliebigen Temperatur eintreten, sobald die Kerne genügend nahe aneinandergeschoben werden. Bei genügend hohen Temperaturen ist auch letzteres nicht erforderlich, da dann die Kerne durch „Molekularstöße“ oder durch Stöße der Strahlungsquanten zertrümmert werden. In diesem Falle muß aber dem Kern zu seiner Zerstörung sehr viel mehr Energie zugeführt werden als bei dichter Packung der Kerne und hohem Druck. (Genau so, wie zur Verdampfung von Wasser unter niedrigem Druck mehr Wärmeenergie erforderlich ist als unter hohem; unter 225 kg.cm^{-2} wird die notwendige Wärmeenergie sogar gleich Null. Unter einem solchen Druck gibt es keinen Unterschied zwischen Wasser und Dampf, da das Auftreten zweier getrennter Phasen in einem solchen Fall unmöglich ist. Das Zusammenpressen des Wassers bis 225 kg.cm^{-2} könnten wir demnach als „mechanische“ Verdampfung auffassen. Etwas Energie wird auch bei diesem „mechanischen“ Verdampfen absorbiert: unter einen solchen Druck gesetztes Wasser muß ja sein Volumen etwas verringern, wodurch die äußeren Druckkräfte Gelegenheit bekommen etwas Arbeit zu leisten. Die auf diese Weise vom Wasser absorbierte Energie ist jedoch vieltausendmal kleiner als bei „thermischem“ Verdampfen unter kleinem Druck; außerdem wird sie sich in der erhöhten Molekularenergie restlos wiederfinden, da das „mechanische“ Verdampfen an sich unter 225 kg.cm^{-2} überhaupt keine Energie erfordert. Desgleichen wird auch eine „mechanische“ Dissoziation der Kerne an sich keine Energie erfordern.) Bei „mechanischer“ Dissoziation bleibt der bekannte „Massendefekt“

Masse des schwersten Korns, nämlich des Urankerns, nur $3,93 \cdot 10^{-22}$ Gramm. Dies bedeutet, daß ein isolierter Urankern bereits in weniger als

$$3,93 \cdot 10^{-22} / 1,28 \cdot 10^{-13} = 3,01 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

seine ganze Masse ausstrahlen mußte! Somit ist die Annahme einer hohen „wahren“ Eigentemperatur der Kerne offenbar absurd.

der Kerne unverändert bestehen. Bei „thermischer“ Dissoziation hingegen wird er aufgehoben, wozu eine große Energiemenge notwendig ist. Mit der Temperaturdissoziation der Kerne hat sich Suzuki beschäftigt (natürlich nur theoretisch). Unter anderem hat er eine Tabelle für die Thermodissoziation der Heliumkerne (die er den damaligen Ansichten gemäß als aus Elektronen und Protonen aufgebaut betrachtete) zusammengestellt. Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, daß der Dissoziationsgrad mit der Temperatur sehr schnell steigt. So z. B. ist unter 100 Atmosphären bei $2,0 \cdot 10^9$ Grad bloß 1%, bei $2,3 \cdot 10^9$ Grad aber bereits 99% dissoziiert¹⁾. Auch auf andere Kerne hat Suzuki seine Untersuchungen ausgedehnt²⁾.

Flügge hat den Einfluß freier Neutronen auf den inneren Aufbau der Sterne untersucht³⁾. Leider ging er dabei von der heutzutage aufgegebenen Ansicht aus, daß das Neutron aus einem Proton und einem Elektron bestehe. Auch glaubte er, daß das Neutron leichter als das Proton sei. Ganz richtig weist Flügge darauf hin, „daß auch in einer Materie, die schwerer ist als die eingebetteten Neutronen, die Neutronenkonzentration nach innen zu noch wachsen kann . . . Der Strahlungsdruck bläst die übrige Materie auf, nur die Neutronen nicht mit“⁴⁾. Als „Kuriosum“ zieht Flügge einen Stern in Erwägung, der nur aus Neutronen besteht; er müsse isotherm sein. Die freien Weglängen der Neutronen seien etwa 10^{10} mal länger als diejenigen der gewöhnlichen Gaspartikelchen⁵⁾. Bekanntlich kann die Diffusion der gewöhnlichen Gase in den Sternen nur sehr langsam vor sich gehen. Eine Ausnahme macht das Neutronengas. Für eine merkbare Entmischung der Neutronen genügt schon ein Zeitraum von nur einer Million Jahre⁶⁾.

Was muß aber in dem extremen Falle geschehen, wo sämtliche Kerne zertrümmert sind? — In diesem Falle stellt der ganze Stern ein Gemisch von Elektronen, Neutronen und Pro-

1) Seitarô Suzuki, Proc. of the Physico-Math. Soc. of Japan (3) **10**, 168, 1928.

2) Seitarô Suzuki, ebenda **11**, 119, 1928; Proc. of the Imperial Academy (Japan) **3**, 650, 1927.

3) Siegfried Flügge, ZS. f. Astrophys. **6**, 272, 1933.

4) Ebenda, S. 282.

5) Ebenda, S. 273.

6) Ebenda, S. 287.

tonen dar (die Zertrümmerung der Protonen soll vorläufig nicht berücksichtigt werden), wobei die Zahl der Elektronen genau gleich der Zahl der Protonen sein muß, diejenige der Neutronen aber nur annähernd gleich der Protonenzahl. Nun muß eine Entmischung beginnen: die schwereren Neutronen werden zum Sternzentrum hinabsinken, die schon an sich etwas leichteren Protonen können sich nicht viel von den Elektronen abscheiden (wegen der elektrostatischen Wechselwirkung). Nach dem oben Gesagten muß diese Entmischung so „schnell“ vor sich gehen, daß bereits nach wenigen Millionen Jahren im Zentrum des Sterns sich eine Neutronengaskugel gebildet haben wird, umgeben von einer Elektronen-Protonengasmischung. In der Neutronengaskugel ist annähernd die Hälfte der ganzen Sternmasse konzentriert. Nun ist die Masse eines Neutrons sehr viel größer, also seine Nullpunktsenergie sehr viel kleiner als beim Elektron. Deshalb kann Dichte und Temperatur in der zentralen Neutronengaskugel des Sterns so enorme Größen erreichen, wie dies bei allen anderen Gasen unter gleichen Bedingungen ganz undenkbar wäre (denn bei allen anderen Gasen können sich die Kerne nicht von den Elektronen merklich abscheiden). Dabei muß so viel Kontraktionsenergie frei werden, daß es völlig überflüssig ist, noch nach anderen Quellen der Sonnenenergie zu suchen (freilich nur dann überflüssig, wenn man Anhänger der „kurzen Zeitskala“ ist).

Bekanntlich hat Milne in einer Reihe von Aufsätzen die Ansicht geäußert, daß Dichte und Temperatur im Sternzentrum sehr hoch sein müssen¹⁾. Letzteres begünstigt die Kernzertrümmerung und die damit verbundene Bildung einer kleinen, aber ungeheuer dichten Kugel aus Neutronengas im Sternzentrum. Dies führt zur Erhöhung von Gravitationsdruck und Temperatur, also auch zur neuen Ausscheidung von freien Neutronen, wodurch die ursprüngliche Neutronengaskugel sich vergrößern muß usw. Somit ist die Bildung einer bedeutenden Neutronengaskugel auch bei kleineren Sternen nicht undenkbar.

In unseren weiteren Untersuchungen nehmen wir als Basis folgendes neue Sternmodell an. Die meisten Kerne sind zertrümmert und die frei gewordenen Neutronen haben sich in einer (dem Volumen nach) kleinen, aber sehr dichten Kuge

1) Vgl. z. B. E. A. Milne, Nature **126**, 238, 1930.

konzentriert, deren Masse annähernd die Hälfte der ganzen Sternmasse ausmacht. Diese zentrale Kugel wird von einem Gemisch von Elektronen und Protonen umhüllt. In dieser Hülle befinden sich in relativ kleinen Mengen auch noch andere (der Zerstörung entgangene) Elemente, jedoch spielen letztere eine nur untergeordnete Rolle.

A priori läßt sich nicht sagen, wieweit unser neues Sternmodell die wirklichen Verhältnisse richtig wiedergibt. Dazu ist es nötig, die Ergebnisse unserer Theorie mit der Beobachtung zu vergleichen, was wir auch zu tun beabsichtigen.

Die Kontraktionsenergie bei dem neuen Sternmodell.

Wir wollen die Kontraktionsenergie der zentralen Neutronengaskugel berechnen, welche wir der Einfachheit halber als homogen und von den umhüllenden Gasen unabhängig betrachten wollen. Wir fangen mit der Sonne an. Setzt man ihre Masse gleich $2 \cdot 10^{33}$ g, so ist die Masse der zentralen Neutronengaskugel gleich 10^{33} g. Die Gesamtzahl der Neutronen ist gleich

$$N = \frac{10^{33}}{1,66 \cdot 10^{-24}} = 6,024 \cdot 10^{56},$$

wenn die Masse eines Neutrons gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ g angenommen wird. Bei unserer angenäherten Rechnung können wir annehmen, daß die Neutronengaskugel dann im Gleichgewicht ist, wenn der Gasdruck (der Strahlungsdruck ist in unserem Falle sehr klein, wie wir es unten sehen werden) gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck ist. Letzterer ist bekanntlich gleich

$$\bar{P} = \frac{3}{20\pi} \cdot \frac{GM^2}{R^4} = \frac{3,18 \cdot 10^{57}}{R^4},$$

wenn man $M = 10^{33}$, und $G = 6,66 \cdot 10^{-8}$ setzt. Es möge der Radius der Neutronengaskugel gleich $R = 10^{11}$ cm sein; dann beträgt der durchschnittliche Gravitationsdruck $\bar{P} = 3,18 \cdot 10^{13}$ Dyn. cm⁻². Die Neutronenzahldichte ist

$$n = \frac{N}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 1,438 \cdot 10^{23},$$

also beträgt der Neutronengasdruck

$$knT = 1,371 \cdot 10^{-16} \cdot 1,438 \cdot 10^{23} \quad T = 1,972 \cdot 10^7 T.$$

Dieser Druck muß gleich \bar{P} sein, d. h. es muß die Gleichung

$$1,973 \cdot 10^7 T = 3,18 \cdot 10^{13}$$

erfüllt werden, was bei

$$T = 1,613 \cdot 10^7$$

geschieht. Bei dieser Temperatur beträgt der Strahlungsdruck

$$\frac{1}{3} a T^4 = \frac{1}{3} \cdot 7,65 \cdot 10^{-15} T^4 = 1,7 \cdot 10^9 \text{ Dyn.cm}^{-2},$$

kommt also neben dem Gasdruck nicht in Betracht. Die Dichte berechnet sich zu

$$\varrho = \frac{10^{33}}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 0,239 \text{ g.cm}^{-3}.$$

Die gesamte in der Kugel enthaltene kinetische Energie der Neutronen ist gleich

$$\frac{3}{2} k T N = 1,997 \cdot 10^{47} \sim 2 \cdot 10^{47} \text{ Erg}.$$

Die gesamte strahlende Energie hingegen beträgt nur

$$\frac{4}{3} \pi R^3 a T^4 = 2,18 \cdot 10^{44} \text{ Erg},$$

kann also neben der kinetischen vernachlässigt werden. Die Kontraktionsenergie ist gleich

$$\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R} = 3,996 \cdot 10^{47} \sim 4 \cdot 10^{47} \text{ Erg}.$$

Da die in der Kugel verbliebene Energie nur die Hälfte davon beträgt, so muß die andere Hälfte, noch bevor der Kugelradius den Wert 10^{11} cm erreicht hatte, ausgestrahlt worden sein. Dazu sind erforderlich

$$\frac{2 \cdot 10^{47}}{1,17 \cdot 10^{41}} = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Jahre},$$

da ja die Sonne in einem Jahr $1,17 \cdot 10^{41}$ Erg ausstrahlt.

Jetzt wollen wir noch die Rechnung für $R = 3 \cdot 10^6$ cm durchführen. In diesem Falle ist das Neutronengas entartet (aber nicht relativistisch). Der Gasdruck muß nach der Formel

$$\frac{\pi}{60} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{5/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{m} + \frac{4\pi^3}{9} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \frac{k^2 m n^{1/3} T^2}{h^2}$$

berechnet werden, wobei $m = 1,66 \cdot 10^{-24}$, $h = 6,55 \cdot 10^{-27}$ und

$n = 5,326 \cdot 10^{36}$ zu setzen ist. Den Strahlungsdruck kann man vernachlässigen, und der mittlere Gravitationsdruck ist jetzt gleich $\bar{P} = 3,926 \cdot 10^{31}$. Wir haben also die Gleichung

$$2,036 \cdot 10^{31} + 1,724 \cdot 10^{10} T^2 = 3,926 \cdot 10^{31},$$

woraus sich

$$T = 3,31 \cdot 10^{10}$$

berechnen läßt. Die Dichte beträgt jetzt

$$\rho = \frac{10^{33}}{\frac{4}{3} \pi (3 \cdot 10^6)^3} = 8,84 \cdot 10^{12} \text{ g.cm}^{-3}.$$

Die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist gleich

$$\frac{3}{2} \bar{P} = \frac{3}{2} \cdot 3,926 \cdot 10^{31} = 5,889 \cdot 10^{31} \text{ Erg.cm}^{-3},$$

also beträgt die gesamte in der Kugel vorhandene kinetische Energie

$$\frac{4}{3} \pi (3 \cdot 10^6)^3 \cdot 5,889 \cdot 10^{31} = 6,66 \cdot 10^{51} \text{ Erg.}$$

Die Kontraktionsenergie ist gleich

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{6,66 \cdot 10^{-8} (10^{33})^2}{3 \cdot 10^6} = 1,332 \cdot 10^{52} \text{ Erg,}$$

wovon die Hälfte, nämlich $6,66 \cdot 10^{51}$ Erg, wie wir eben gesehen haben, in der Kugel verblieben ist. Folglich muß die andere Hälfte, noch bevor der Kugelradius den Wert $3 \cdot 10^6$ cm erreicht hat, ausgestrahlt worden sein. Die dazu notwendige Zeit beträgt

$$\frac{6,66 \cdot 10^{51}}{1,17 \cdot 10^{41}} = 5,7 \cdot 10^{10} \text{ Jahre.}$$

Als Kriterium der nichtrelativistischen Entartung gilt die Bedingung

$$\frac{2}{h^3} \left(2 \pi m k T \right)^{3/2} < n < \frac{8 \pi m^3 c^3}{3 h^3},$$

die erfüllt sein muß¹⁾. Hier haben wir $m = 1,66 \cdot 10^{-24}$ und $T = 3,31 \cdot 10^{10}$ zu setzen, und dies ergibt:

$$2,32 \cdot 10^{36} < n < 3,68 \cdot 10^{39}.$$

1) Vgl. S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **91**, 451, 1931.

Unser Wert $n = 5,325 \cdot 10^{36}$ genügt dieser Bedingung, wodurch unsere Annahme einer nichtrelativistischen Entartung gerechtfertigt wird. Was übrigens die obere Grenze $3,68 \cdot 10^{39}$ anbetrifft, so ist sie für uns belanglos. Sie hätte nur Bedeutung bei konstanter Ruhemasse des Neutrons [sie (nämlich die Zahl $n = 3,68 \cdot 10^{39}$) würde dann die Grenze zwischen gewöhnlicher und relativistischer Entartung andeuten]; bei uns jedoch ist, entsprechend dem Gesetz der Erhaltung der Energie, nicht die Ruhemasse, sondern die Gesamtmasse des Neutrons konstant (mehr als das: die Gesamtmasse eines jeden Neutrons nimmt infolge des Massenverlustes durch Ausstrahlung des Sterns sogar ab; dieser Massendefekt eines jeden Neutrons ist bei einer Neutronengaskugel von 10^{33} g nicht groß und soll hier vernachlässigt werden). In einem solchen Falle muß aber selbst bei relativistischen Geschwindigkeiten der Neutronen die gewöhnliche Entartungsformel angewandt werden (nur darf nicht vergessen werden, daß die in einem ccm enthaltene kinetische Energie nicht gleich $\frac{3}{2} \bar{P}$ zu setzen ist, sondern gleich $3 \bar{P}$).

In Tabelle 5 sind ähnliche Rechnungen für verschiedene andere Werte von R durchgeführt worden.

Wir haben nur die Kontraktionsenergie des Neutronengases in Betracht gezogen, nicht aber diejenige der Elektronen-Protonengashülle. Darum muß die gesamte Kontraktionsenergie der Sonne größer sein. Andererseits haben wir jene Energie nicht in Betracht gezogen, die zur Zertrümmerung der Kerne notwendig war. Diese Energie muß bei dichter Packung sehr gering sein, ganz wie es bei der Atomzerstörung der Fall ist. Wenn wir beim absoluten Nullpunkt Atome bis zur gegenseitigen Berührung aneinanderschieben, so ist die dazu notwendige Arbeit gleich Null. Der weiteren Kompression, die zwangsweise mit Störungen der „Quantenbahnen“ der Atomelektronen verbunden sein muß, wird das Gas steigenden Widerstand entgegenzusetzen, bis letzterer gleich dem Nullpunktsdruck des entstandenen Gemisches von Elektronen und Kernen wird. Die zur Zerstörung der geordneten Quantenbahnen verbrauchte Energie wird sich restlos in der kinetischen Energie der Elektronen und Kerne wiederfinden. Sie wird also keinesfalls zur Ionisation verbraucht werden, weil bei so dichter Packung das Ionisationspotential gleich Null ist. Sollten wir ein Gas nicht beim abso-

Tabelle 5.

Neues Modell der Sonne. Sonnenmasse = 2.10^{33} g.
 Masse der inneren (homogenen) Neutronengaskugel = 10^{33} g.
 Jährlicher Energieverlust durch Ausstrahlung = $1,17.10^{41}$ Erg.

| Radius (in cm) | Durch- schnittlicher Druck (in Dyn. cm ⁻²) | Dichte (in g. cm ⁻³) | Temperatur (Grad abs.) | Seit „Anfang des Sonnenlebens“ ausgestrahlte Energie (in Erg) | Die für diese Ausstrahlung notwendige Zeitspanne (in Jahren) |
|-------------------|---|-------------------------------------|---------------------------|---|--|
| 10^{11} | $3,18.10^{13}$ | 0,239 | $1,61.10^6$ | $2,00.10^{47}$ | $1,71.10^6$ |
| 10^{10} | $3,18.10^{17}$ | 239 | $1,61.10^7$ | $2,00.10^{48}$ | $1,71.10^7$ |
| 10^9 | $3,18.10^{21}$ | $2,39.10^5$ | $1,61.10^8$ | $2,00.10^{49}$ | $1,71.10^8$ |
| 10^8 | $3,18.10^{25}$ | $2,39.10^8$ | $1,61.10^9$ | $2,00.10^{50}$ | $1,71.10^9$ |
| 5.10^7 | $5,09.10^{26}$ | $1,91.10^9$ | $3,22.10^9$ | $4,00.10^{50}$ | $3,42.10^9$ |
| 10^7 | $3,18.10^{29}$ | $2,39.10^{11}$ | $1,61.10^{10}$ | $2,00.10^{51}$ | $1,71.10^{10}$ |
| 3.10^6 | $2,93.10^{31}$ | $8,84.10^{12}$ | $3,31.10^{10}$ | $6,66.10^{51}$ | $5,69.10^{10}$ |
| 2.10^6 | $1,99.10^{33}$ | $2,98.10^{13}$ | $4,13.10^{10}$ | $9,99.10^{51}$ | $8,54.10^{10}$ |
| $1,6.10^6$ | $4,85.10^{32}$ | $5,83.10^{13}$ | $2,04.10^{10}$ | $1,25.10^{52}$ | $1,07.10^{11}$ |
| $1,57.10^6$ | $5,23.10^{32}$ | $6,17.10^{13}$ | $1,21.10^{10}$ | $1,27.10^{52}$ | $1,08.10^{11}$ |
| $1,56.10^6$ | $5,37.10^{32}$ | $6,29.10^{13}$ | $6,71.10^9$ | $1,28.10^{52}$ | $1,09.10^{11}$ |
| $1,5558.10^6$ | $5,43.10^{32}$ | $6,34.10^{13}$ | $1,20.10^9$ | $1,28.10^{52}$ | $1,09.10^{11}$ |
| $1,55566.10^6$ | $5,43.10^{32}$ | $6,34.10^{13}$ | 0 | $1,28.10^{52}$ | $1,09.10^{11}$ |

luten Nullpunkt adiabatisch komprimieren, sondern bei hoher anfänglicher Temperatur, so kann die vollständige Atomzertrümmerung bei bedeutend geringeren Dichten erfolgen, und in diesem Falle wird eine beträchtliche Energiemenge zur Ionisation „verbraucht“ werden, d. h. in potentielle Form übergehen. Bei weiterer Kompression wird sich diese potentielle Energie in kinetische verwandeln, so daß schließlich die zur eigentlichen Ionisation verbrauchte Energie gleich Null wird. Wenn nun in analoger Weise im Inneren eines Sternes die Kerne bereits in größerer gegenseitiger Entfernung in Trümmer gehen, so müssen dabei beträchtliche Energiemengen „absorbiert“ werden. Letztere werden bei genügender weiterer Kompression wieder frei, so daß letzten Endes zur Zertrümmerung der Kerne überhaupt keine Energie verbraucht worden ist. Wir wollen daher bei unseren Untersuchungen die „Bindeenergie“ in den

Kernen überhaupt nicht in Betracht ziehen. Dadurch machen wir wahrscheinlich einen Fehler, da bei den wirklichen Sternen die Kerne wohl schon in merklichen Entfernungen voneinander in Trümmer gehen, und in einem solchen Falle wird eine gewisse Energiemenge absorbiert; letztere wird in unseren Berechnungen vernachlässigt. Andererseits wollen wir aber den von der Elektronen-Protonen-Umhüllung geleisteten Beitrag zur Kontraktionsenergie ebenfalls nicht berücksichtigen.

Die Tabelle 5 zeigt, daß mit der Kontraktion der Sonne ihre innere Temperatur bis zu einem bestimmten Maximum (bis etwas über $4 \cdot 10^{10}$ Grad) steigt und dann wieder abnimmt. Diese Abnahme geht am Ende des „Sonnenlebens“ äußerst schnell (beinahe plötzlich) vor sich (vorausgesetzt natürlich, daß sich die Ausstrahlung der Sonne nicht ändere). Im Endstadium der Sonne ist ihre innere Temperatur 0° abs. und ihre innere Dichte $\rho = 6,34 \cdot 10^{13}$ g.cm $^{-3}$. Nun haben wir oben gesehen, daß nach Rabi der Neutronenradius gleich $1,31 \cdot 10^{-13}$ cm ist. Sollte es zulässig sein, das Neutron als starre Kugel vom erwähnten Radius zu betrachten, so müßte die maximale Dichte des Neutronengases (wo die Neutronen einander berühren) $9,23 \cdot 10^{13}$ g.cm $^{-3}$ sein, also nur etwa 1,5 mal größer als die oben erwähnte maximale Sonnendichte. Bei unseren Rechnungen haben wir aber die Neutronen als Punkte aufgefaßt, weshalb unsere Zahlen für das Endstadium vielleicht nicht unbeträchtlich von der Wirklichkeit abweichen.

Im Endstadium ist die Temperatur gleich 0° abs. und das Neutronengas völlig entartet; strahlende Energie ist natürlich nicht mehr vorhanden. Nun erweist sich aber die entsprechende Kontraktionsenergie gleich $2,56 \cdot 10^{52}$ Erg. Daraus folgt, daß die eine Hälfte dieser Energie während des „Sonnenlebens“ ausgestrahlt worden, und die andere Hälfte als Nullpunktsenergie in der Sonne verblieben ist. Die $1,28 \cdot 10^{52}$ Erg ausgestrahlter Energie bedeuten einen Massenverlust von $1,42 \cdot 10^{31}$ g, d. h. 1,42 % der „Neutronengaskugel“, oder 0,71 % der ganzen Sonnenmasse. Die gesamte Energie (verbliebene Nullpunktsenergie + ausgestrahlte Energie) ist gleich $2,56 \cdot 10^{52}$ Erg, was ein Massenäquivalent von $2,84 \cdot 10^{31}$ g darstellt, d. h. 2,84 % der Neutronengaskugel, oder 1,42 % der ganzen Sonnenmasse. Da die Zahl der Neutronen während des „Sonnenlebens“ unverändert geblieben ist, so muß die Gesamtmasse eines jeden einzelnen

Neutrons trotz seiner großen Nullpunktsgeschwindigkeit nicht zugenommen, sondern um $1,42\%$ abgenommen haben. Um seine jetzige Ruhemasse zu erhalten, muß noch die kinetische Masse seiner Nullpunktenergie abgezogen werden, die ebenfalls $1,42\%$ ausmacht. Somit beträgt die jetzige Ruhemasse des Neutrons nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$ g, sondern um $2,84\%$ weniger, d. h. sie ist jetzt gleich $1,61 \cdot 10^{-24}$ g. Bei sehr genauen Berechnungen müßte man dies in Betracht ziehen, was wir jedoch hier nicht tun wollen.

Die für die Ausstrahlung verfügbare Energiemenge von $1,28 \cdot 10^{52}$ Erg ist genügend, um den Energieverlust der Sonne ($1,17 \cdot 10^{41}$ Erg pro Jahr) im Verlaufe von $1,09 \cdot 10^{11}$ Jahren zu decken. Natürlich ist die Sonne noch lange nicht abgekühlt; aber in welchem Stadium befindet sie sich augenblicklich? — Die Antwort hängt davon ab, wann man den „Anfang des Sonnenlebens“ ansetzt. Öpik kommt auf Grund verschiedener Beobachtungstatsachen zu folgendem Schluß: „... all this evidence points to an age of the stellar universe of the same order of magnitude as the currently accepted age of the solar system: not much more than 3000 million years“¹⁾. Aus Tabelle 5 sehen wir, daß die Neutronengaskugel sich in $3,42 \cdot 10^9$ Jahren bis zu einem Radius von $5 \cdot 10^7$ cm verdichten muß, und eine solche Zeitspanne stimmt sehr gut mit der Schätzung von Öpik überein. Danach müßte augenblicklich im Inneren der Sonne eine Temperatur von $3,22 \cdot 10^9$ Grad herrschen und eine Dichte von $1,91 \cdot 10^9$ g.cm⁻³. Entgegen der gewöhnlichen Auffassung ist nach Tabelle 5 die innere Sonnentemperatur im Steigen begriffen, und wird erst nach etwa $8 \cdot 10^{10}$ Jahren ihr Maximum erreichen, um dann nach weiteren $2 \cdot 10^{10}$ Jahren (rund gerechnet) bis auf den absoluten Nullpunkt herabzusinken (vorausgesetzt natürlich, daß die Strahlung der Sonne konstant bleibt).

In Tabelle 6 sind ähnliche Berechnungen für einige andere Sterne gemacht, jedoch nicht bis zu dem entarteten Zustand fortgesetzt worden.

Es ist nicht ganz sicher, ob man die Neutronen tatsächlich als starre Kugeln vom Radius $1,31 \cdot 10^{-13}$ cm ansehen darf. Vielleicht wäre es möglich, diesen Radius nicht als wirklichen Radius im gewöhnlichen Sinne aufzufassen, sondern den Neutronen

1) E. Öpik, Popular Astronomy 41, 79, 1933.

Tabelle 6.

| AO Cas; 36,3 M_{\odot} ; 140000 L_{\odot} . | | | | | |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|---|---|
| Radius | Druck | Dichte | Temperatur | Zeit „Anfang des Sternlebens“ ausgestrahlte Energie | Die für diese Ausstrahlung notwendige Zeitspanne |
| 10^9 | $4,19 \cdot 10^{24}$ | $8,67 \cdot 10^6$ | $5,85 \cdot 10^9$ | $2,64 \cdot 10^{52}$ | $1,61 \cdot 10^6$ Jahre |
| 10^8 | $4,19 \cdot 10^{28}$ | $8,67 \cdot 10^9$ | $5,85 \cdot 10^{10}$ | $2,64 \cdot 10^{53}$ | $1,61 \cdot 10^7$ |
| 10^7 | $4,19 \cdot 10^{32}$ | $8,67 \cdot 10^{12}$ | $5,85 \cdot 10^{11}$ | $2,64 \cdot 10^{54}$ | $1,61 \cdot 10^8$ |
| V Pup; 21,2 M_{\odot} ; 9800 L_{\odot} . | | | | | |
| 10^9 | $1,43 \cdot 10^{24}$ | $5,06 \cdot 10^6$ | $3,42 \cdot 10^9$ | $8,99 \cdot 10^{51}$ | $7,84 \cdot 10^6$ |
| 10^8 | $1,43 \cdot 10^{28}$ | $5,06 \cdot 10^9$ | $3,42 \cdot 10^{10}$ | $8,99 \cdot 10^{52}$ | $7,84 \cdot 10^7$ |
| 10^7 | $1,44 \cdot 10^{32}$ | $5,06 \cdot 10^{12}$ | $3,42 \cdot 10^{11}$ | $8,99 \cdot 10^{53}$ | $7,84 \cdot 10^8$ |
| Algol; 4,6 M_{\odot} ; 600 L_{\odot} . | | | | | |
| 10^9 | $6,73 \cdot 10^{22}$ | $1,10 \cdot 10^6$ | $7,42 \cdot 10^8$ | $4,23 \cdot 10^{50}$ | $6,03 \cdot 10^6$ |
| 10^8 | $6,73 \cdot 10^{26}$ | $1,10 \cdot 10^9$ | $7,42 \cdot 10^9$ | $4,23 \cdot 10^{51}$ | $6,03 \cdot 10^7$ |
| 10^7 | $6,73 \cdot 10^{30}$ | $1,10 \cdot 10^{12}$ | $7,42 \cdot 10^{10}$ | $4,23 \cdot 10^{52}$ | $6,03 \cdot 10^8$ |
| Capella; 4,2 M_{\odot} ; 115 L_{\odot} . | | | | | |
| 10^9 | $5,60 \cdot 10^{22}$ | $1,00 \cdot 10^6$ | $6,77 \cdot 10^8$ | $3,53 \cdot 10^{50}$ | $2,62 \cdot 10^7$ |
| 10^8 | $5,60 \cdot 10^{26}$ | $1,00 \cdot 10^9$ | $6,77 \cdot 10^9$ | $3,53 \cdot 10^{51}$ | $2,62 \cdot 10^8$ |
| 10^7 | $5,60 \cdot 10^{30}$ | $1,00 \cdot 10^{12}$ | $6,77 \cdot 10^{10}$ | $3,53 \cdot 10^{52}$ | $2,62 \cdot 10^9$ |
| O ₂ Eri C; 0,23 M_{\odot} ; 0,0060 L_{\odot} . | | | | | |
| 10^9 | $1,68 \cdot 10^{20}$ | $5,49 \cdot 10^4$ | $3,71 \cdot 10^7$ | $1,06 \cdot 10^{48}$ | $1,51 \cdot 10^9$ |
| 10^8 | $1,68 \cdot 10^{24}$ | $5,49 \cdot 10^7$ | $3,71 \cdot 10^8$ | $1,06 \cdot 10^{52}$ | $1,51 \cdot 10^{10}$ |

Bei Doppelsternen sind hier immer nur die Hauptsterne gemeint.

eine punktförmige Gestalt zuzuschreiben, genau so, wie Born und Infeld es mit den Elektronen getan haben (s. oben S. 15). In diesem Falle würde eine Dichte von über $9,23 \cdot 10^{13} \text{ g.cm}^{-3}$ keine Komplikation der Berechnungen bedeuten, und es wäre auch bei einem größeren Stern nicht schwer, die gesamte im Ver-

laufe seines Lebens freigewordene Kontraktionsenergie zu berechnen. Wir wollen solche Berechnungen auch tatsächlich durchführen.

Nach dem Gesetz der Erhaltung der Energie müßte bei einer sich ohne Ausstrahlung kontrahierenden homogenen Neutronengaskugel ihre Gesamtmasse unverändert bleiben: die Zunahme der Neutronen an kinetischer Masse müßte durch gleichzeitige Abnahme ihrer Ruhemasse genau aufgewogen werden. In Wirklichkeit aber wird jeder Stern im Verlaufe seines „Lebens“ einen Massenverlust durch Ausstrahlung gehabt haben, ohne daß sich dabei die Zahl seiner Neutronen zu verändern gebraucht hat (wenn man den Neutronenverlust durch zu heftige Ca-Protuberanzen und den Gewinn durch einstürzende Meteorite vernachlässigt). Die Gesamtmasse eines jeden einzelnen Neutrons beträgt am Ende des „Sternlebens“ nicht mehr $1,66 \cdot 10^{-24}$, sondern nur $1,66 \cdot 10^{-24} \alpha$ Gramm, wo α einen echten Bruch bedeutet; sie hat sich also verringert. Natürlich wird die Ruhemasse des Neutrons sich erst recht verringert haben. Im Endstadium des Sterns, d. h. bei 0° abs., beträgt der Nullpunktsdruck des Neutronengases

$$p = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 n^{5/3}}{a \cdot 166 \cdot 10^{-24}} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 \varrho^{5/3}}{a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}},$$

da $\varrho = n a \cdot 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g. cm}^{-3}$ ist. Der durchschnittliche Gravitationsdruck in unserer homogenen Neutronengaskugel von der Masse M und dem Radius R ist

$$\bar{P} = \frac{3}{20 \pi} \frac{G M^2}{R^4} = \frac{1}{5} \left(\frac{4 \pi}{3} \right)^{1/3} G M^{2/3} \varrho^{4/3}.$$

Im Gleichgewicht muß $p = \bar{P}$ sein, also:

$$\frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h^2 \varrho^{5/3}}{a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}} = \frac{1}{5} \left(\frac{4 \pi}{3} \right)^{1/3} G M^{2/3} \varrho^{4/3},$$

woraus

$$\varrho^{1/3} = \frac{4^{4/3} \pi G M^{2/3} a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3}}{3 h^2}$$

folgt. Die Kontraktionsenergie ist gleich $\frac{3}{5} \frac{G M^2}{R}$. Nimmt man an, daß die Hälfte davon im Stern zurückbleibt, so ergibt sich für die ausgestrahlte Energie: $0,3 \frac{G M^2}{R}$, oder: $0,3 \left(\frac{4 \pi}{3} \right)^{1/3} G M^{5/3} \varrho^{1/3}$.

Setzt man statt $\rho^{1/3}$ dessen Wert aus der vorigen Gleichung ein, so erhält man:

ausgestrahlte Energie

$$= \frac{2\pi}{5} \left(\frac{16\pi}{3} \right)^{1/3} \frac{G^2 a^{8/3} (1,66 \cdot 10^{-24})^{8/3} M^{7/3}}{h^2} = A a^{8/3} M^{7/3}.$$

Wenn M_0 den Anfangswert von M bedeutet, so ist sein Endwert offenbar aM_0 . Dann bildet $Aa^{8/3} M_0^{7/3}$ den oberen Grenzwert für die ausgestrahlte Energie, und $Aa^{8/3} (aM_0)^{7/3} = Aa^5 M_0^{7/3}$ den unteren. Andererseits ist die ausgestrahlte Energie gleich $(M_0 - aM_0) c^2 = (1-a) M_0 c^2$. Wir können also schreiben:

$$Aa^5 M_0^{7/3} < (1-a) M_0 c^2 < Aa^{8/3} M_0^{7/3},$$

oder:

$$a^5 < \frac{(1-a) c^2}{A M_0^{4/3}} < a^{8/3},$$

oder, wenn man die Zahlenwerte einsetzt:

$$a^5 < \frac{7,0075 \cdot 10^{45} (1-a)}{M_0^{4/3}} < a^{8/3}. \quad (86)$$

Die Masse der Capella (Hauptstern) beträgt 4,2 Sonnenmassen, oder $8,4 \cdot 10^{33}$ g, wovon die Hälfte, d. h. $4,2 \cdot 10^{33}$ g, auf die innere Neutronengaskugel kommt. Nimmt man der Einfachheit halber an, daß die Neutronengaskugel sich im Anfangsstadium ihrer Entwicklung befindet, so haben wir $M_0 = 4,2 \cdot 10^{33}$ in (85) zu setzen, und dies ergibt:

$$a^5 < 10,341 (1-a) < a^{8/3}.$$

Die in Betracht kommende Wurzel der Gleichung

$$a^5 = 10,341 (1-a)$$

ist $a = 0,9320$, und diejenige von

$$a^{8/3} = 10,341 (1-a)$$

beträgt $a = 0,9221$. Somit ist für die Capella:

$$0,9221 < a < 0,9320.$$

Der kleinere Grenzwert von a ergibt für die ausgestrahlte Energiemenge

$$(1-a) M_0 c^2 = (1-0,9221) \cdot 4,2 \cdot 10^{33} \cdot 9 \cdot 10^{20} = 2,9446 \cdot 10^{53} \text{ Erg.}$$

Die Capella ist (absolut genommen) 115 mal heller als die Sonne,

somit strahlt sie $115.1,17.10^{41} = 1,3455.10^{43}$ Erg pro Jahr aus. Die Dauer einer solchen Strahlung (wenn sie konstant bleibt) beträgt

$$\frac{2,9446.10^{53}}{1,3455.10^{43}} = 2,19.10^{10} \text{ Jahre.}$$

Der größere Wert von a ergibt in ähnlicher Weise $1,91.10^{10}$ Jahre.

In Tabelle 7 sind derartige Berechnungen auch für andere Sterne durchgeführt worden.

Tabelle 7.

| Name des Sterns (bei den Doppel- sternen ist immer nur der Hauptstern gemeint) | Maximal- wert von α | Minimal- wert von α | Wenn die Strahlung im Verlaufe des „Sternlebens“ konstant wäre, so müßte sie dauern (vorausgesetzt, daß die Hälfte der Kontraktionsenergie im Stern zurückgehalten wird): | |
|--|----------------------------------|----------------------------------|---|-------------------|
| | | | länger als | und kürzer als |
| <i>AO Cas</i> | 0,7038 | 0,5865 | $5,91.10^8$ Jahre | $8,25.10^8$ Jahre |
| <i>V Pup</i> | 0,7714 | 0,6894 | $3,90.10^9$ | $5,17.10^9$ |
| <i>Algol</i> | 0,9257 | 0,9141 | $4,38.10^9$ | $5,07.10^9$ |
| <i>Capella</i> | 0,9320 | 0,9221 | $1,91.10^{10}$ | $2,19.10^{10}$ |
| <i>O₂ Eri C</i> | 0,9980 | 0,9980 | $5,90.10^{11}$ | $5,90.10^{11}$ |

Wir haben überall die Kontraktionsenergie unter der Voraussetzung berechnet, daß die Neutronengaskugel homogen aufgebaut ist. Ein anderer Aufbau würde auch eine andere Kontraktionsenergie ergeben. Trotzdem ist es kaum möglich anzunehmen, daß *AO Cas* seit „Anfang der Welt“ strahle, wenn dieser Anfang vor mehr als 3 Milliarden Jahren liegt. Bei den übrigen Sternen besteht keine solche Schwierigkeit. *AO Cas* müßte (bei konstanter Strahlung) seine ganze Masse ($7,26.10^{34}$ g) bereits in $3,99.10^9$ Jahren restlos ausstrahlen.

G. Watagin's Formel: $n_+ = n_- \sim \frac{16 \pi}{h^3 c^3} (kT)^3$ für die „Paarbildung“ bei extremer Temperatur. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Formel (aber nicht hinsichtlich ihrer Ableitung).

Es gilt heute als feststehende Tatsache, daß ein Lichtquant von der Energie $h\nu > 2m_e c^2$ (m_e = Ruhemasse des Elektrons) sich in ein Paar: ein Elektron und ein Positron verwandeln

kann. Unlängst hat Watagin die Frage über die Elektronenzahl (pro cem) n_- und die Positronenzahl n_+ untersucht, die mit der strahlenden Energie im Gleichgewicht wären. Nach Watagin¹⁾ ergibt sich bei extrem hohen Temperaturen folgende Formel:

$$n_+ = n_- \sim \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3, \quad (87)$$

wobei die Bedingung

$$T \gg \frac{2 c^2 m_e}{k}$$

erfüllt sein muß.

Hinsichtlich der Formel (87) (nicht aber hinsichtlich ihrer Ableitung) sehe ich mich gezwungen einen Prioritätsanspruch zu erheben.

Im Jahre 1929 habe ich die Hypothese aufgestellt, daß es neben den Elektronen und Protonen (von den Positronen konnte ich damals natürlich nichts wissen) noch andere negative und positive Elementarteilchen gebe²⁾. Die Ladungen dieser Elementarteilchen seien genau gleich den Ladungen der Elektronen (resp. Protonen), nicht aber ihre entsprechenden Massen. Unter gewöhnlichen Umständen treten diese hypothetischen Elementarteilchen nicht isoliert auf, sondern zu Dipolen verbunden, wobei ich letztere mit den Lichtquanten identifizierte. Die hypothetischen Elementarteilchen sind also die „Bausteine“ der Lichtquanten. Jedes Lichtquant besteht aus einem positiven und einem genau gleichgroßen negativen „Baustein“, wobei diese „Bausteine“, nach meiner Auffassung, dermaßen deformiert werden, daß das Lichtquant sich in eine zylindrische „Krafttröhre“ verwandelt³⁾.

Meine scharf begrenzten zylindrischen Krafttröhren verhalten sich zu den wirklichen Lichtquanten etwa ebenso, wie das klassische scharf begrenzte kugelförmige Elektron sich zu dem wirklichen Elektron verhält.

Gewöhnlich wird angenommen, daß bei schneller Bewegung eines (klassischen) Elektrons seine kugelförmige Gestalt

1) G. Watagin, Phil. Mag. (7) **17**, 911, 1934. Vgl. auch C. R. **200**, 909, 1935.

2) W. Anderson, „Über die Struktur der Lichtquanten“, ZS. f. Phys. **58**, 842, 1929.

3) Ebenda, S. 850.

sich infolge der Lorentzschen Kontraktion in eine ellipsoide verwandelt (wobei die kurze Achse in die Bewegungsrichtung fällt). Nun taucht die Frage auf, warum eine solche Lorentz-Kontraktion nicht bei den Lichtquanten zu bemerken ist. Letztere bewegen sich ja mit Lichtgeschwindigkeit, und in einem solchen Falle müßten ihre Wellenlängen infolge der Lorentzschen Kontraktion als gleich Null erscheinen, was aber der Beobachtung widerspricht. Die Sache ist die, daß bei einer bewegten Welle die Lorentzsche Kontraktion durch die „Dilatation der Zeit“ genau kompensiert wird. Entgegen der gewöhnlichen Auffassung nehme ich nun an, daß genau dieselbe Kompensation auch bei schnell bewegten Elektronen oder auch bei den „Bausteinen“ der Lichtquanten stattfindet. In meiner Theorie spielt nämlich der Durchmesser eines solchen schnell bewegten Partikelchens die Rolle einer Wellenlänge, freilich einer nicht polarisierten ¹⁾. Was sich deformiert, das sind nur die außerhalb des eigentlichen Elektrons befindlichen Kraftlinien, die sich gegen die „Äquatorebene“ zusammendrängen. Die eigentliche Durchmesserlänge eines schnell bewegten Elektrons ist gegen Lorentzsche Kontraktion genau so immun, wie die Wellenlänge eines mit der Geschwindigkeit c bewegten Lichtquants.

Mit steigender Temperatur werden die Dimensionen der Lichtquanten immer kleiner; natürlich muß dasselbe auch von den „Bausteinen“ gesagt werden, aus denen die Lichtquanten bestehen. Schließlich werden die Dimensionen der negativen „Bausteine“ mit denjenigen der gewöhnlichen Elektronen gleich werden, also werden auch ihre Massen gleich (da ja ihre Ladungen nach unserer Theorie als identisch angenommen werden). Somit werden die negativen „Bausteine“ mit den gewöhnlichen Elektronen in jeder Hinsicht identisch. Letztere können aber bekanntlich auch im isolierten Zustand selbständig existieren. Bei einer sehr viel höheren „kritischen“ Temperatur wird der positive „Baustein“ mit einem gewöhnlichen (klassischen) Proton identisch. Bei einer so hohen Temperatur können die Lichtquanten in Elektronen und Protonen dissoziieren (heutzutage muß natürlich ein Positron statt eines Protons angenommen werden). Mehr als das: es besteht zwischen dissoziiertem und undissoziiertem Zustand überhaupt kein Unterschied (wie man

1) Ebenda, S. 844.

etwa bei mechanischer Druckionisation nicht sagen kann, ob die Elektronen frei oder gebunden sind, ob sie sich in ionisiertem oder in nichtionisiertem Zustande befinden). Für die „kritische“ Temperatur habe ich folgenden Ausdruck gefunden:

$$T_{krit} = \frac{9}{8} \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{hc^3 M_p}{a\pi^3 e^2 k}, \quad (88)$$

wo $a = \frac{2}{3}$ beim Flächenladungsmodell des Protons zu setzen ist und $a = \frac{4}{5}$ beim Raumladungsmodell; M_p bedeutet die Masse eines Protons¹⁾.

Im Jahre 1930 waren die frei existierenden Positronen noch nicht bekannt, und ich war daher gezwungen anzunehmen, daß der positive „Baustein“ erst dann isoliert existieren könne, wenn sein Radius mit dem Radius des klassischen Protons identisch werde. Nun ist der klassische Protonenradius von der Größenordnung 10^{-16} cm und die Protonenmasse $M_p = 1,66 \cdot 10^{-24}$ g. Dieser Wert in (88) eingeführt ergibt eine enorm hohe „kritische“ Temperatur von der Größenordnung 10^{15} Grad. Bei dieser Temperatur ist das (kompressibel gedachte) klassische Elektron bis zu demselben Volumen zusammengepreßt, wie das klassische Proton. Bei weiterem Steigen der Temperatur nehmen die Volumina der Protonen und Elektronen ständig ab, bleiben aber dabei einander gleich. Man kann also annehmen, daß oberhalb der „kritischen“ Temperatur ein jedes Lichtquant in zwei gleichgroße, aber entgegengesetzt geladene Partikelchen dissoziieren kann. Bei vollständiger Dissoziation muß offenbar

$$n_+ = n_- = n_q \quad (89)$$

sein, wo n_q die ursprüngliche Zahl der Lichtquanten pro ccm bedeutet. Nun kann nach (66)

$$n_q = 2,40412 \cdot 8\pi \left(\frac{kT}{hc} \right)^3$$

angenommen werden, oder:

$$n_q = 1,20206 \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3,$$

1) W. Anderson, „Die Kraftröhrentheorie der Lichtquanten und die Thermodynamik der Hohlraumstrahlung“, ZS. f. Phys. 59, 716, 1930.

oder im Hinblick auf (89):

$$n_+ = n_- = 1,20206 \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3. \quad (90)$$

Diese Formel stellt das „mathematische Äquivalent“ meiner damaligen Theorie dar.

Ich glaube Watagins Formel (87) und meine Formel (90) als identisch betrachten zu dürfen.

Es ist in der Tat sehr bemerkenswert, daß Watagins Theorie einerseits und meine ganz anders geartete und ziemlich primitive „Krafröhrentheorie“ andererseits zu Resultaten führen, die bei extremen Temperaturen nicht nur qualitativ, sondern sogar quantitativ übereinstimmen!

Watagin ist der Meinung, daß seine Formel (87) eigentlich nur die oberen Grenzwerte von n_+ und n_- ergibt. Ich bin genau derselben Meinung auch von meiner Formel (90), denn sie entspricht ja dem äußersten Falle, wo sämtliche Lichtquanten als dissoziiert betrachtet werden können.

Heutzutage muß in (88) unter M_p natürlich nicht die Protonenmasse, sondern die Positronenmasse, oder die ihr gleiche Elektronenmasse m_e verstanden werden, und a kann nach Born und Infeld gleich 1,2361 angenommen werden¹⁾. Dann erhalten wir (da $\frac{hc}{2\pi e^2} = 137$ gesetzt werden kann):

$$T_{krit} = \frac{9}{8} \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \cdot \frac{hc^3 m_e}{1,2361 \pi^3 e^2 k} = \frac{9 \cdot 137}{8 \cdot 1,2361 \pi^2} \cdot \left(\frac{75}{2\pi} \right)^{1/3} \frac{2c^2 m_e}{k},$$

oder:

$$T_{krit} = 28,78 \frac{2c^2 m_e}{k} = 3,41 \cdot 10^{11} \text{ Grad.} \quad (91)$$

Wir können also schreiben:

$$T_{krit} >> \frac{2c^2 m_e}{k}.$$

Wir haben aber oben gesehen, daß auch Watagins Theorie eine ähnliche Bedingung an die Temperatur stellt. Also auch in dieser Hinsicht besteht kein Widerspruch zwischen Watagins Theorie und meiner „Krafröhrentheorie“.

Man kann die Lichtquantenzahl n_q auch von einem anderen Standpunkt aus berechnen. Es möge die durchschnittliche kine-

1) M. Born und L. Infeld, Proc. Roy. Soc. London (A) **144**, 446, 1934.

tische Energie eines Partikelchens xkT betragen, wobei x einen vorläufig noch unbekannten Zahlenfaktor bedeutet. Der entsprechende Gasdruck ist bekanntlich gleich $p = nkT$, und die in einem ccm enthaltene kinetische Energie ist gleich $E = nxkT$. Nun wissen wir, daß im nichtrelativistischen Falle $p = \frac{2}{3}E$ sein muß, und im relativistischen: $p = \frac{1}{3}E$. Im ersteren Falle haben wir also $nkT = \frac{2}{3}(nxkT)$ und daher $x = \frac{3}{2}$; im letzteren hingegen $nkT = \frac{1}{3}(nxkT)$, also $x = 3$. Daraus folgt, daß die durchschnittliche kinetische Energie im nichtrelativistischen Falle gleich $\frac{3}{2}kT$ ist, und im relativistischen gleich $3kT$. Letzteres muß sich auch auf die Lichtquanten beziehen. Die in einem ccm enthaltene strahlende Energie ist gleich aT^4 , also muß die dort vorhandene Zahl von Lichtquanten

$$n = n_q = \frac{aT^4}{3kT} = \frac{aT^3}{3k}$$

betragen. Nun ist bekanntlich

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3},$$

und dies ergibt:

$$n_q = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \cdot \frac{T^3}{3k} = \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3.$$

Demnach erhalten wir in dem extremen Falle, wo sämtliche Lichtquanten dissoziiert sind:

$$n_+ = n_- = \frac{\pi^4}{90} \cdot \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3 = 1,0823 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3. \quad (92)$$

Diese Formel unterscheidet sich nur unwesentlich von (90) und von (87).

Bei T_{krit} verschwindet jeder Unterschied zwischen dissoziiertem und nichtdissoziiertem Zustand; in gewohnter Weise bezeichnen wir diesen Zustand als „mechanische“ Dissoziation der Lichtquanten. Bei T_{krit} kann Hohlraumstrahlung mit gleichem Rechte sowohl als Lichtquantengas, wie auch als ein Gemisch von Elektronen und Positronen angesehen werden. Es ist nun sehr interessant, die Nullpunktsenergie der Elektronen und Positronen zu berechnen. (Bekanntlich folgen die Lichtquanten der Bose-Statistik, die Elektronen und Positronen hingegen der

Fermi-Statistik, weshalb sie auch Nullpunktsenergie besitzen.) Ist E_0 die in einem ccm enthaltene Nullpunktsenergie, so haben wir bekanntlich:

$$E_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{6}{a\pi} \right)^{1/3} hcn^{4/3},$$

wo a das statistische Gewicht eines Partikelchens bedeutet. Wir haben hier zwei Arten von Partikelchen: Elektronen und Positronen; außerdem kann das Elektron sowie das Positron zwei Arten von „Spin“ haben. Somit müssen wir $a = 4$ setzen. Andererseits ist

$$n = n_+ + n_- = 2 n_q,$$

so daß wir

$$E_0 = \frac{3}{8} \left(\frac{6}{4\pi} \right)^{1/3} hc (2n_q)^{4/3} = \frac{3}{4} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} hcn_q^{4/3} \quad (93)$$

erhalten. Wir haben oben gesehen, daß man entweder

$$n_q = 1,20206 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$$

oder

$$n_q = 1,0823 \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$$

annehmen darf. Der erstere Wert in (93) eingeführt ergibt:

$$E_0 = 8,1794 \cdot 10^{-15} T^4,$$

und der letztere:

$$E_0 = 7,1113 \cdot 10^{-15} T^4,$$

wenn man nach Birge $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$ und $c = 2,99796 \cdot 10^{10}$ setzt ¹⁾. Da es schwer zu entscheiden ist, welcher der beiden Werte von E_0 zuverlässiger wäre, wollen wir das arithmetische Mittel akzeptieren, nämlich:

$$E_0 = 7,6453 \cdot 10^{-15} T^4. \quad (94)$$

Andererseits ist die (experimentell bestimmte) Strahlungskonstante nach Birge ²⁾ gleich $a = 7,6518 \cdot 10^{-15}$, und dies ergibt für die Energiedichte der Hohlraumstrahlung:

$$E_T = 7,6518 \cdot 10^{-15} T^4. \quad (95)$$

1) R. T. Birge, „Probable Values of the General Physical Constants“, Phys. Rev. Supplement 1 (Nr. 1), S. 59, Juli 1929.

2) Ebenda, S. 61.

Ich glaube (94) und (95) als identisch betrachten zu dürfen, so daß man

$$E_T = E_0 \quad (96)$$

schreiben kann. Nun verschwindet bei T_{krit} jeder Unterschied zwischen dissoziierten und nichtdissoziierten Lichtquanten. Wir können also ein und dieselbe Substanz mit genau gleichem Rechte entweder als Hohlraumstrahlung von der enormen Temperatur T_{krit} , oder als ein Elektronen-Positronen-Gemisch von der Temperatur 0° abs. ansehen. Einerseits dürfen wir jedes Elektron zusammen mit dem ihm nächsten Positron als ein einziges Lichtquant betrachten, welches der Bose-Statistik folgt und deshalb nur thermische und gar keine Nullpunktsenergie besitzt. Andererseits haben wir das Recht, den einzelnen Elektronen und Positronen gar keine thermische, sondern nur Nullpunktsenergie im Einklang mit der Fermi-Statistik zuzuschreiben. Lassen wir eine solche Substanz durch eine Öffnung ausströmen, so können wir in diesem Prozeß das Ausströmen eines Gases von 0° abs. sehen, welches von gar keiner Strahlung begleitet wird. Andererseits können wir mit dem gleichen Rechte das ausströmende Gas als reine strahlende Energie ohne jede Beimischung von irgendwelcher „Materie“ ansehen. Lichtquantengas (bei T^0) einerseits und ein entsprechendes Elektronen-Positronen-Gemisch (bei 0° abs.) andererseits: das sind zwei „Phasen“ eines und desselben Grundstoffes. Unter gewöhnlichen Bedingungen weisen beide „Phasen“ einen enormen Unterschied auf, der jedoch unter extremen Bedingungen verschwindet. Wir haben das Recht folgenden paradox klingenden Ausspruch zu tun: das Erwärmen eines Hohlraumes bis T_{krit} ($=3,41 \cdot 10^{11}$ Grad) bedeutet das Erreichen des absoluten Nullpunktes der Temperatur!

Zum Schluß sei hier noch Placinteanu's Theorie der Photonen (Lichtquanten) erwähnt¹⁾. Nach dieser Theorie besteht ein genügend energiereiches Lichtquant aus einem Elektron und einem Positron. Ich finde, daß der Grundgedanke dieser Theorie mit meiner im Jahre 1930 aufgestellten „Kraftrohrentheorie“ identisch ist.

¹⁾ Jean J. Placinteanu, C. R. **197**, 549, 1933. Vgl. auch Journal de Physique et le Radium (7) **7**, 127, 1936.

Der durchschnittliche Massenabsorptionskoeffizient des neuen Sternmodells.

Der totale Absorptionskoeffizient ist die Summe des „wahren“ Absorptionskoeffizienten und des Absorptionskoeffizienten durch Streuung. Zuerst wollen wir uns mit dem letzteren beschäftigen. Er ist nach der bekannten Formel von J. J. Thomson gleich

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4 N}{3 m_e^2 c^4}, \quad (97)$$

wo N die Zahl der Elektronen pro Gramm Materie bedeutet.

Was unser neues Sternmodell anbetrifft, so interessiert uns eigentlich nur die Absorption in dessen Elektronen-Protonen-Umhüllung. (Und nur diese Absorption ist allein auch gemeint, wenn wir von dem „durchschnittlichen Massenabsorptionskoeffizienten des neuen Sternmodells“ sprechen.) Es ist klar, daß jedes Gramm dieser Umhüllung $\frac{1}{m_H}$ Elektronen und $\frac{1}{m_H}$ Protonen enthält, wenn m_H die Masse eines Wasserstoffatoms bedeutet. Wir haben also $N = \frac{1}{m_H}$ in (97) zu setzen, und dies ergibt:

$$\sigma_0 = \frac{8\pi e^4}{3 m_e^2 m_H c^4}. \quad (98)$$

Benutzt man die bekannte Eddingtonsche Gleichung

$$\frac{hc}{2\pi e^2} = 137, \quad (99)$$

so erhält man aus (98):

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3 \cdot 137^2 m_e^2 m_H c^2}. \quad (100)$$

Die Formeln (97) und (100) gelten nur solange die kinetische Masse eines jeden Lichtquants klein im Vergleich mit der Ruhemasse des Elektrons ist. Für härtere Lichtquanten ist folgende von Klein und Nishina aufgestellte Formel ¹⁾ zu gebrauchen:

$$\sigma = \sigma_0 \left\{ \frac{1+a}{\alpha^2} \left[\frac{2(1+a)}{1+2a} - \frac{1}{a} \log \text{nat}(1+2a) \right] - \frac{1}{2a} \log \text{nat}(1+2a) - \frac{1+3a}{(1+2a)^2} \right\}, \quad (101)$$

1) O. Klein und Y. Nishina, ZS. f. Phys. 52, 868, 1929.

wo

$$\alpha = \frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (102)$$

bedeutet. Sollte z. B. $h\nu = m_e c^2$ sein, so haben wir $\alpha = 1$ in (101) zu setzen, und dies ergibt $\sigma = 0,43\sigma_0$. Ist hingegen $h\nu = 0,5 m_e c^2$, so erhalten wir $\sigma = 0,56\sigma_0$, und $h\nu = 2 m_e c^2$ ergibt $\sigma = 0,84\sigma_0$.

Die Formel von Klein und Nishina hat sich bei den Beobachtungen gut bewährt, so daß man erwarten könnte, daß sie sich auch für das Innere der Sterne gut bewähre. Dagegen ist aber folgendes zu bemerken. Wenn im Laboratoriumversuch eine harte Strahlung von irgendeiner Materie absorbiert wird, so haben die Elektronen der letzteren vor der Absorption solche Geschwindigkeiten, die klein im Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit sind. Die Masse eines jeden Elektrons kann deshalb gleich seiner Ruhemasse m_e gesetzt werden. Im Inneren der Sterne hingegen besitzen die Elektronen einen beträchtlichen kinetischen Massenzuwachs, so daß man die durchschnittliche Masse eines einzelnen Elektrons (bei nicht zu extremen Temperaturen) gleich $m_e + \frac{3kT}{2c^2}$ setzen muß. Statt (100) haben wir dann:

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3.137^2 \pi \left(m_e + \frac{3kT}{2c^2} \right)^2 m_H c^2}, \quad (103)$$

und statt (102):

$$\alpha = \frac{2h\nu}{2m_e c^2 + 3kT}. \quad (104)$$

Bei extremen Temperaturen kann die durchschnittliche Elektronenmasse einfach gleich $\frac{3kT}{c^2}$ angenommen werden, und statt (100) erhalten wir:

$$\sigma_0 = \frac{2h^2}{3.137^2 \pi \left(\frac{3kT}{c^2} \right)^2 m_H c^2} = \frac{2h^2 c^2}{3^3.137^2 \pi k^2 T^2 m_H}. \quad (105)$$

Andererseits kann bei diesen extremen Temperaturen die durchschnittliche Masse eines Strahlungsquants $\frac{h\nu}{c^2}$ gleich der durchschnittlichen Masse des Elektrons $\frac{3kT}{c^2}$ angenommen werden, so daß wir $\alpha = 1$ setzen können. Wir haben aber schon oben ge-

sehen, daß (101) in einem solchen Falle $\sigma = 0,43 \sigma_0$ ergibt, also im Hinblick auf (105):

$$\sigma = \frac{0,86 h^2 c^2}{3^3 \cdot 137^2 \pi k^2 T^2 m_H}. \quad (106)$$

Eine solche Form müßte also die Formel von Klein und Nishina für extreme Temperaturen aufweisen.

Wir wollen aber die ganze Angelegenheit von einer tieferen und prinzipielleren Seite betrachten. Wenn wir von einer Absorption von Strahlen durch Elektronen sprechen, so meinen wir stillschweigend, daß die Bewegung der schnellen und leichten Strahlungsquanten durch die langsamen und schweren Elektronen so oder anders gehemmt werde. Eine solche stillschweigende Voraussetzung ist bei mäßigen Temperaturen vollkommen berechtigt; sie wird aber bei extremen Temperaturen hinfällig. Die relativistischen Elektronengeschwindigkeiten unterscheiden sich nur wenig von der Geschwindigkeit der Strahlungsquanten; auch ist der Unterschied zwischen der Strahlungsquantenmasse und der Elektronenmasse nur gering. In einem solchen Falle muß aber der Begriff eines Absorptionskoeffizienten (seitens der Elektronen) jeden Sinn verlieren. Die Elektronen sind jetzt ihrem Wesen nach den Strahlungsquanten sehr ähnlich, und können deshalb nicht als ein bloß „hemmender Faktor“ angesehen werden. Man muß dagegen die Sache so auffassen, daß die Energie sowohl durch Strahlungsquanten als auch durch Elektronen übermittelt wird. Wenn sich in einem bestimmten Raume 2000 Strahlungsquanten und 2000 Elektronen befinden, so ist es beinahe dasselbe, als wenn in diesem Raume sich 4000 Strahlungsquanten und gar keine Elektronen befänden. Die Rolle eines „hemmenden“ Faktors können in diesem extremen Falle nur noch die Atomkerne spielen (und auch das nur solange ihre Geschwindigkeiten noch keine relativistischen sind). Die Streuung durch Atomkerne (in unserem Falle durch Protonen) ist aber bekanntlich außerordentlich gering. Man müßte ja in (97) statt m_e die etwa zweitausendmal schwerere Masse des Protons setzen. Relativistisch bewegte Elektronen, welche die Bewegung der strahlenden Energie hemmen, sind analog den vielen Bäumen, welche uns den Wald zu sehen verhindern. Nach allem

Gesagten kann der Absorptionskoeffizient durch Streuung bei den extremen Temperaturen im Inneren der Sterne einfach gleich Null gesetzt werden.

Man kann von einer Streuung der Strahlungsquanten an relativistisch bewegten Elektronen höchstens nur in dem Sinne sprechen, wie man neuerdings von Streuung der Strahlungsquanten an anderen Strahlungsquanten spricht. „In diesem Zusammenhang muß die Frage gestellt werden, ob die aus der Diracschen Theorie abgeleiteten Resultate über die Streuung von Licht an Licht usw. schon als endgültig betrachtet werden können, oder ob zu erwarten ist, daß die spätere Theorie zu anderen Ergebnissen führt“¹⁾. Unsere vorliegenden Untersuchungen prästendieren aber nicht auf eine so hohe Präzision, daß man Streuung von Licht an Licht in Betracht zu ziehen brauchte.

In den äußeren Teilen der Elektronen-Protonen-Umhüllung ist die Temperatur verhältnismäßig niedrig, so daß man die Streuung nach (100) berechnen kann. Die Temperatur der inneren Teile hingegen ist bei den mittleren Sternen von der Größenordnung einiger Milliarden Grad, wo die „Molekulargeschwindigkeiten“ der Elektronen schon als relativistisch (oder beinahe relativistisch) angesehen werden dürfen. Der entsprechende Absorptionskoeffizient kann nach dem oben Gesagten gleich Null angenommen werden. Das arithmetische Mittel aus den Absorptionskoeffizienten der äußeren und der inneren Teile kann als durchschnittlicher Absorptionskoeffizient (durch Streuung) der Elektronen-Protonen-Umhüllung angesehen werden. Er ist offenbar gleich

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{2h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2} + 0 \right) = \frac{h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2} \sim 0,2. \quad (107)$$

Die Gleichung (107) gilt aber nur für mittlere Sterne. Ist hingegen der Stern sehr klein, so wird selbst in den inneren Teilen der Umhüllung die Temperatur ungenügend sein, um den Elektronen relativistische „Molekulargeschwindigkeiten“ zu erteilen. Dann kann aber auch der entsprechende Absorptionskoeffizient nicht mehr gleich Null gesetzt werden, weshalb $\bar{\sigma}$ für kleine Sterne größer als in (107) sein muß. Für (hinsicht-

1) W. Heisenberg und H. Euler, „Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons“, ZS. f. Phys. **98**, 732, 1936.

lich der Masse) sehr große Sterne wird $\bar{\sigma}$ offenbar kleiner als in (107) sein.

Wenden wir uns nun dem „wahren“ Absorptionskoeffizienten zu. Dabei wollen wir uns aber nicht auf die älteren Untersuchungen von Kramers¹⁾ stützen, sondern auf die neueren von Kothari und Majumdar²⁾, und zwar besonders auf die endgültige Zusammenfassung von Majumdar³⁾. In unserer Elektronen-Protonen-Umhüllung brauchen wir offenbar nur die „frei-frei“-Übergänge in Betracht zu ziehen. Dann ist nach Majumdar der „wahre“ Massenabsorptionskoeffizient im nichtentarteten und nichtrelativistischen Falle⁴⁾ gleich

$$K_1 = \frac{8 \pi^2 h^2 Z^2 e^6}{315.3^{1/2} (2 \pi m_e)^{5/2} c (kT)^{7/2}} \cdot \frac{\varrho}{\mu A m_H^2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_2}, \quad (108)$$

im entarteten nichtrelativistischen Falle⁵⁾ gleich

$$K_2 = \frac{16 \pi^2 Z^2 e^6}{45.3^{1/3} h c k^2 T^2} \cdot \frac{1}{A m_H} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_3}, \quad (109)$$

im nichtentarteten relativistischen Falle⁶⁾ gleich

$$K_3 = \frac{2 \pi^2 e^8 h Z^3}{5 c^3 m_e^2 k^3 T^3} \cdot \frac{\varrho}{\mu A m_H^2} \cdot \frac{\beta_1}{\beta_4}, \quad (110)$$

und endlich im entarteten relativistischen Falle⁷⁾ gleich

$$K_4 = \frac{32 \pi^3 e^8 Z^3}{5 h^2 c^6 m_e^3 A m_H} \frac{\beta_1}{\beta_5}. \quad (111)$$

Hier bedeutet Z die Atomnummer, A das Atomgewicht⁸⁾, μ das

1) H. A. Kramers, Phil. Mag. (6) **46**, 836, 1923.

2) R. C. Majumdar, „Die Opazität eines entarteten Gases“, *Astronomische Nachrichten* **243**, 5, 1931; D. S. Kothari und R. C. Majumdar, „Die Opazität eines entarteten Gases“, *Astron. Nachr.* **244**, 65, 1931; R. C. Majumdar und D. S. Kothari, „Der relativistische Opazitätskoeffizient III“, *A. N.* **247**, 1, 1932.

3) R. C. Majumdar, „Theorie des stellaren Absorptionskoeffizienten“, *A. N.* **247**, 217, 1932.

4) Ebenda, Sp. 236. Im Original steht noch ein n im Zähler, was einen offenbaren Druckfehler darstellt.

5) Ebenda, Sp. 238.

6) Ebenda, Sp. 242.

7) Ebenda.

8) Im Original steht A' statt A , m statt m_e und H statt m_H .

durchschnittliche Molekulargewicht. Die β sind Zahlenfaktoren: $\beta_1 = 1,0823$, $\beta_2 = 1,0128$, $\beta_3 = 1,0173$, $\beta_4 = 1,0596$ und $\beta_5 = 1,0369$.

Im Falle unserer Elektronen-Protonen-Umhüllung haben wir $Z = 1$, $A = 1$ und $\mu = \frac{1}{2}$ zu setzen. Wenn wir außerdem die Eddingtonsche Relation (99) in Betracht ziehen, so erhalten wir:

$$K_1 = \frac{h^5 c^2 Q}{315.137^2 \cdot 6^{1/2} \pi^{5/2} m_e^{3/2} m_H^2 k^{7/2} T^{7/2}} \cdot \frac{1,0823}{1,0128}, \quad (112)$$

$$K_2 = \frac{2 h^2 c^2}{45.137^3 \cdot 3^{1/2} \pi m_H k^2 T^2} \cdot \frac{1,0823}{1,0173}, \quad (113)$$

$$K_3 = \frac{h^5 c Q}{20.137^4 \pi^2 m_e^2 m_H^3 k^3 T^3} \cdot \frac{1,0823}{1,0596}, \quad (114)$$

$$K_4 = \frac{h^2}{5.137^4 \pi m_e^2 m_H c^2} \cdot \frac{1,0823}{1,0369}. \quad (115)$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß (113) bis auf einen Zahlenfaktor mit (106) übereinstimmt; desgleichen (115) mit (100).

Führt man in (112) bis (115) die entsprechenden numerischen Werte ein, so erhält man die in Tabelle 8 zusammengestellten Resultate.

Tabelle 8.

| „Wahrer“ Massenabsorptionskoeffizient des ionisierten Wasserstoffs. | | |
|---|--|------------------------------------|
| | Nichtrelativistisch | Relativistisch |
| Nichtentartet | $\frac{1,48 \cdot 10^{23} Q}{T^{7/2}}$ | $\frac{8,75 \cdot 10^{17} Q}{T^3}$ |
| Entartet | $\frac{4,17 \cdot 10^{15}}{T^2}$ | $1,34 \cdot 10^{-5}$ |

In Tabelle 9 werden die von Chandrasekhar aufgestellten Entartungskriteria ¹⁾ auf ionisierten Wasserstoff angewandt.

1) S. Chandrasekhar, Monthly Not. R. A. S. **91**, 451, 1931.

Tabelle 9.

| Entartungskriterien für ionisierten Wasserstoff. | | |
|--|---|--|
| | Nichtrelativistisch | Relativistisch |
| Nichtentartet | $\varrho \ll 8,09 \cdot 10^{-9} T^{3/2}$ $T \ll 5,9 \cdot 10^9$ | $\varrho \ll 4,75 \cdot 10^{-24} T^3$ $T \gg 5,9 \cdot 10^9$ |
| Entartet | $\varrho \ll 9,77 \cdot 10^5$ $\varrho \gg 8,09 \cdot 10^{-9} T^{3/2}$ | $\varrho \gg 4,75 \cdot 10^{-24} T^3$ $\varrho \gg 9,77 \cdot 10^5$ |

Es möge eine Kugel vom Radius r_0 von einer Atmosphäre umgeben sein, deren Dichte nach dem Gesetz

$$\frac{\varrho}{\varrho_0} = \left(\frac{r_0}{r} \right)^\nu$$

abnimmt, wo ϱ_0 die Dichte an der Basis der Atmosphäre und ν eine Konstante bedeutet. Die gesamte Masse dieser Atmosphäre ist gleich

$$\int_{r_0}^{\infty} 4 \pi r^2 \varrho dr = 4 \pi \varrho_0 r_0^\nu \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^{\nu-2}}.$$

Dieser Ausdruck ist nur dann endlich, wenn $\nu > 3$ ist.

Betrachten wir einen vertikalen Zylinder (vom Querschnitt eines qcm), dessen Basis mit der Basis der Atmosphäre zusammenfällt und dessen Höhe gleich $r - r_0$ ist. Die in diesem vertikalen Zylinder enthaltene Masse ist gleich

$$\int_{r_0}^r \varrho dr = \varrho_0 r_0^\nu \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^\nu} = \frac{\varrho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^{\nu-1} \right] = \frac{\varrho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \right].$$

Soll unser vertikaler Zylinder die ganze Atmosphäre durchqueren, so muß er bis $\varrho = 0$ fortgesetzt werden; dann ist seine Masse gleich $\varrho_0 r_0 / (\nu - 1)$. Das Verhältnis der beiden Massen ist gleich

$$\frac{\varrho_0 r_0}{\nu-1} \left[1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \right] / \frac{\varrho_0 r_0}{\nu-1} = 1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^{\frac{\nu-1}{\nu}}.$$

Für $\nu = 3$ ist dies Verhältnis gleich $1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{2/3}$. Wenn wir nun die im vertikalen Zylinder enthaltene Masse bis $\varrho = 0,001 \varrho_0$, statt bis $\varrho = 0$ berechnen, so haben wir dadurch $1 - (0,001)^{2/3} = 0,99$, d. h. 99% der gesamten Masse in Betracht gezogen. Wir haben aber gesehen, daß $\nu > 3$ bei $r = \infty$ sein muß. Man wird annehmen können, daß auch im Falle eines zwar endlichen, aber doch sehr großen r der Wert von ν wohl kaum kleiner, wahrscheinlich aber größer als 3 sein wird. Wenn so, so wird auch bei endlichen Werten von r durch die Massenberechnung bis $\varrho = 0,0001 \varrho_0$ kaum viel weniger, wahrscheinlich sogar mehr als 99% der gesamten im Zylinder enthaltenen Masse erfaßt. Darum wollen auch wir uns damit begnügen, die Berechnungen nur bis $\varrho = 0,001 \varrho_0$, statt bis $\varrho = 0$ durchzuführen.

Wenden wir uns jetzt der Tabelle 5 zu. Wenn die Sonne $3,42 \cdot 10^9$ Jahre existiert (was wohl kaum sehr weit von der Wahrheit sein dürfte), so muß die durchschnittliche Temperatur der zentralen Neutronengaskugel $3,22 \cdot 10^9$ Grad betragen und die durchschnittliche Dichte gleich $1,91 \cdot 10^9 \text{ g.cm}^{-3}$ sein. Wir haben oben gesehen, daß nach Flügge eine Neutronengaskugel isotherm sein muß. Wenn eine solche Ansicht auch übertrieben sein mag, so unterliegt es wohl kaum einem Zweifel, daß der Temperaturgradient im Neutronengase sehr gering ist. Dann kann aber auch die Temperatur an der Basis der Elektronen-Protonen-Umhüllung nicht sehr viel kleiner als $3,22 \cdot 10^9$ Grad sein. Wir werden wohl kaum einen sehr großen Fehler begehen, wenn wir sie gleich $2 \cdot 10^9$ Grad ansetzen. Die Dichte an der Basis der Umhüllung ist selbstverständlich kleiner als $1,91 \cdot 10^9 \text{ g.cm}^{-3}$. In Tabelle 10 sind die „wahren“ Absorptionskoeffizienten für verschiedene Werte von ϱ_0 und von ϱ zusammengestellt. Dabei wurde angenommen, daß die Dichte ϱ mit der Entfernung proportional T^3 abnimmt. Wenn z. B. an der Basis der Umhüllung eine Temperatur von $2 \cdot 10^9$ Grad und eine Dichte von 10^5 g.cm^{-3} herrscht, so beträgt die Temperatur $2 \cdot 10^8$ Grad dort, wo die Dichte den Wert 10^2 g.cm^{-3} aufweist.

Ein Blick auf die Tabelle 10 genügt, um sich davon zu überzeugen, daß bei der Sonne die „wahre“ Absorption neben der Absorption durch Streuung vernachlässigt werden kann. Bei den heißeren Sternen wird dies erst recht der Fall sein.

(Eine Ausnahme werden nur die äußersten Schichten bilden, wo die „frei-gebunden“-Übergänge eine dominierende Rolle spielen.)

Tabelle 10.

| ϱ | $\varrho_0 = 1,91 \cdot 10^9$ | $\varrho_0 = 10^5$ | $\varrho_0 = 10^3$ |
|-------------------|-------------------------------|----------------------|----------------------|
| ϱ_0 | $1,34 \cdot 10^{-5}$ | $7,81 \cdot 10^{-6}$ | $7,81 \cdot 10^{-8}$ |
| $0,1 \varrho_0$ | $1,34 \cdot 10^{-5}$ | $1,15 \cdot 10^{-5}$ | $1,15 \cdot 10^{-7}$ |
| $0,01 \varrho_0$ | $1,34 \cdot 10^{-5}$ | $1,68 \cdot 10^{-5}$ | $1,68 \cdot 10^{-7}$ |
| $0,001 \varrho_0$ | $1,34 \cdot 10^{-5}$ | $2,47 \cdot 10^{-5}$ | $2,47 \cdot 10^{-7}$ |

Was die „Paarbildung“ nach Dirac anbetrifft, so kann sie unseres Erachtens keine merkliche Wirkung auf den Durchschnittswert des stellaren Absorptionskoeffizienten ausüben. Diracs „Paarbildung“ kann ja erst bei so hohen Temperaturen in genügendem Maße auftreten, wo die durchschnittlichen „Molekulargeschwindigkeiten“ der Elektronen sich schon wenig von der Lichtgeschwindigkeit unterscheiden, wo also nach unserer Auffassung der Begriff eines Absorptionskoeffizienten seinen gewöhnlichen Sinn verliert. Dasselbe gilt auch hinsichtlich der Protonenzertrümmerung, bei der ein Neutron und ein Positron frei werden. Bekanntlich sind Positronen sehr „kurzlebig“, indem sie sich sehr leicht mit Elektronen oder mit Neutronen vereinigen. Trotzdem ist es nicht unmöglich, daß manche von den entstandenen Neutronen Zeit finden in das Innere des Sternes hinabzusinken und auf diese Weise die zentrale Neutronengaskugel zu vergrößern. Gleicherweise ist es nicht unmöglich, daß ein Teil der entstandenen Positronen zusammen mit der entsprechenden Anzahl Elektronen „sich rettet“, indem er Zeit gewinnt noch vor der gegenseitigen „Vernichtung“ den Stern zu verlassen. Es wäre verlockend anzunehmen, daß die Sonnenkorona ein Gemisch von Elektronen und Positronen darstellt, denen es geglückt ist aus den tieferen Schichten der Sonne zu entweichen und sich auf diese Weise zu „retten“. Die Wahrscheinlichkeit der Begegnung eines Positrons mit einem Elektron (also die Wahrscheinlichkeit einer gegenseitigen „Vernichtung“) ist in der Korona natürlich sehr viel kleiner als in den tieferen Schichten. Im Inneren der zentralen Neutronengaskugel kann es vorkommen, daß ein Strahlungsquant in ein

Elektron und ein Positron zerfällt (nach Dirac). Letzteres kann sich mit einem Neutron zu einem Proton verbinden. Auf diese Weise ist ein Proton und ein Elektron in der zentralen Neutronengaskugel entstanden, was eine Abnahme der Zahl der freien Neutronen bedeutet. Wir wollen jedoch auf alle diese Fragen hier nicht weiter eingehen.

Nach allem Gesagten kommt für die Absorption der Elektronen-Protonen-Umhüllung nur die Absorption durch Streuung in Betracht. Der durchschnittliche totale Massenabsorptionskoeffizient $\bar{\kappa}$ der Umhüllung kann ohne großen Fehler gleich $\bar{\sigma}$, d. h. gleich dem durchschnittlichen Massenabsorptionskoeffizienten durch Streuung gesetzt werden, so daß wir nach (107) schreiben können:

$$\bar{\kappa} = \frac{h^2}{3.137^2 \pi m_e^2 m_H c^2}. \quad (116)$$

**Die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung.
Vergleich der berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten
mit den beobachteten.**

Nach unserem neuen Sternmodell (s. oben S. 72) beträgt die Masse der inneren Neutronengaskugel $0,5 M$ und die Masse der Elektronen-Protonen-Umhüllung ebenfalls $0,5 M$, wenn M die gesamte Masse des Sterns bedeutet. Der Radius der Neutronengaskugel sei r_0 und derjenige des ganzen Sterns r_1 . Die effektive Temperatur der äußeren Sternoberfläche (die wir mit der wahren Temperatur der äußeren Sternoberfläche identifizieren wollen) sei T_{eff} und die Temperatur an der Basis der Umhüllung T_0 . Wir nehmen an, daß sämtliche strahlende Energie durch Kontraktion der Neutronengaskugel geliefert wird; wir vernachlässigen also die Kontraktionsenergie der Umhüllung. Weiter nehmen wir an, daß T_{eff} klein gegenüber T_0 , und r_0 klein gegenüber r_1 ist.

Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß alle Lichtquanten sich nur senkrecht zur Sternoberfläche bewegen. Wieviel g.cm^{-2} haben sie dann beim Passieren der Umhüllung zu durchqueren? — Wäre die Höhe der Umhüllung klein gegenüber r_0 , so könnten wir offenbar schreiben:

$$0,5 M / 4 \pi r_0^2 = \frac{M}{8 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2}.$$

Sollte die Dichte der (als homogen angenommenen) Umhüllung (ϱ_0) die Hälfte der Dichte der (ebenfalls homogenen) Neutronengaskugel betragen, so ist die Dichte der letzteren gleich $2\varrho_0$, und wir können schreiben:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot 2\varrho_0 = \frac{M}{2} = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) \varrho_0,$$

und dies ergibt einerseits:

$$M = \frac{16 \pi r_0^3 \varrho_0}{3},$$

und andererseits:

$$2r_0^3 = r_1^3 - r_0^3,$$

oder:

$$r_1 = 3^{1/3} r_0.$$

Jetzt haben die Lichtstrahlen zu durchqueren

$$\begin{aligned} (r_1 - r_0) \varrho_0 &= r_0 \varrho_0 (3^{1/3} - 1) = \frac{\frac{16}{3} \pi r_0^3 \varrho_0 \cdot \frac{3}{2} (3^{1/3} - 1)}{8 \pi r_0^2} = \\ &= \frac{3 (3^{1/3} - 1)}{2} \cdot \frac{M}{8 \pi r_0^2} = \frac{0,66 M}{8 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2}. \end{aligned}$$

Ist die Dichte der Neutronengaskugel $3\varrho_0$, so erhalten wir $\frac{0,59 M}{8 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2}$; ist sie $4\varrho_0$, so ergibt sich $\frac{0,53 M}{8 \pi r_0^2}$; ist sie $5\varrho_0$, so

$\frac{0,49 M}{8 \pi r_0^2}$. Bei den wirklichen Sternen ist die Dichte der Umhüllung veränderlich; wir glauben aber keinen besonders großen Fehler zu begehen, wenn wir bei ihnen im Durchschnitt

$$\frac{0,5 M}{8 \pi r_0^2} = \frac{M}{16 \pi r_0^2} \text{ g.cm}^{-2} \quad (117)$$

annehmen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, daß die Dichte der Neutronengaskugel gleich $n\varrho_0$ ist, und die Dichte der (als homogen angenommenen) Umhüllung gleich ϱ_0 . In einem solchen Falle haben wir:

$$\frac{4}{3} \pi r_0^3 \cdot n\varrho_0 = \frac{M}{2} = \frac{4}{3} \pi (r_1^3 - r_0^3) \varrho_0,$$

und dies ergibt:

$$nr_0^3 = r_1^3 - r_0^3,$$

oder:

$$r_1 = (n + 1)^{1/3} r_0.$$

Der Druck an der Basis der Umhüllung ist gleich

$$p_0^1 = \int_{r_0}^{r_1} M_r G_{Q_0} \frac{dr}{r^2},$$

wenn M_r die innerhalb einer Kugel vom Radius r eingeschlossene Masse bedeutet. Es ist nicht schwer einzusehen, daß

$$M_r = \frac{4}{3} \pi (r^3 - r_0^3) Q_0 + \frac{4}{3} \pi r_0^3 n Q_0 = \frac{4}{3} \pi Q_0 [r^3 + (n - 1) r_0^3]$$

ist. Dieser Wert, in die vorherige Gleichung eingeführt, ergibt nach Ausführung der Integration:

$$p_0^1 = \frac{4}{3} \pi G Q_0^2 \left[\frac{r_1^2 - r_0^2}{2} + (n - 1) r_0^3 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) \right].$$

Berechnen wir nun den Druck an der Basis der Umhüllung unter Vernachlässigung der Gravitationswirkung der Umhüllung auf sich selbst. In diesem Falle ist der Druck gleich

$$p_0 = \int_{r_0}^{r_1} \frac{4}{3} \pi r_0^3 n Q_0 G_{Q_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{4}{3} \pi G Q_0^2 n r_0^3 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Das Verhältnis der beiden Drucke ist gleich

$$\frac{p_0^1}{p_0} = \frac{[(n + 1)^{1/3} + 1] (n + 1)^{1/3} + n - 1}{2n}.$$

Da nun, wie wir oben gesehen haben, $r = (n + 1)^{1/3} r_0$ ist,

so erhalten wir:

$$\frac{p_0^1}{p_0} = \frac{[(n + 1)^{1/3} + 1] (n + 1)^{1/3} + n - 1}{2n}.$$

In Tabelle 11 sind die Verhältnisse $\frac{p_0^1}{p_0}$ für verschiedene Werte von n berechnet.

Tabelle 11.

| n | $\frac{p_0^1}{p_0}$ | n | $\frac{p_0^1}{p_0}$ |
|-----|---------------------|-----|---------------------|
| 2 | 1,38 | 5 | 1,31 |
| 3 | 1,35 | 7 | 1,29 |
| 4 | 1,33 | 999 | 1,05 |

In Wirklichkeit ist die Dichte der Umhüllung keine konstante Größe, wie dies in Tabelle 11 vorausgesetzt wird, sondern eine veränderliche. Trotzdem geht aus den Zahlen dieser Tabelle klar hervor, daß auch bei einer Umhüllung von veränderlicher Dichte der Ersatz von p_0^1 durch p_0 einen Fehler bedeutet, der sicherlich kleiner als 38% von p_0 sein wird. Durch diesen Ersatz werden die folgenden Rechnungen bedeutend vereinfacht. Natürlich erhalten wir bei dieser Vereinfachung für die Basis der Umhüllung eine zu niedrige Temperatur. Andererseits wollen wir den Strahlungsdruck und den Nullpunktsdruck vernachlässigen, wodurch wir für die Basis der Umhüllung eine zu hohe Temperatur erhalten¹⁾. Somit müssen unsere beiden Vereinfachungen einander mehr oder weniger kompensieren.

Wenn man der Umhüllung einen polytropen Bau zuschreibt, so müssen die Gleichungen

1) An der Grenze zwischen der Neutronengaskugel und der Umhüllung muß beiderseits gleicher Druck und gleiche Temperatur herrschen. Da das „Molekulargewicht“ des Neutronengases doppelt so groß ist als dasjenige einer Elektronen-Protonen-Mischung, so wird die Dichte der letzteren an der gemeinsamen Grenze bloß die Hälfte der Neutronengasdichte betragen. Diese Regel gilt aber nur bei Abwesenheit einer Entartung. Ist hingegen das Elektronengas entartet, so muß die Dichte der Elektronen-Protonen-Mischung offenbar noch kleiner sein.

Bei unseren Untersuchungen haben wir angenommen, daß die Neutronengaskugel homogen und isotherm sei. Das letztere wird wohl bis zu einem gewissen Grade richtig sein, nicht aber das erstere, weil die Dichte in der Neutronengaskugel zweifellos vom Zentrum zu ihrer Oberfläche abnehmen muß. Es ist daher schwer mit Sicherheit zu entscheiden, ob und wie weit das Elektronengas an der Basis der Umhüllung entartet ist. Eine Entartung muß die Temperatur an der Basis der Umhüllung natürlich herabsetzen, da ja in einem solchen Falle zur Aufwiegung des Gravitationsdruckes der Entartungsdruck dem thermischen Gasdruck zu Hilfe kommt.

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{q_0}{q}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ und } \frac{q}{q_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (118)$$

erfüllt sein, wo γ eine Konstante bedeutet. Gleichzeitig muß auch die Gleichung

$$p = \frac{\Re}{\mu} q T = 2 \Re q T \quad (119)$$

erfüllt sein, wo \Re die absolute Gaskonstante bedeutet und μ das „Molekulargewicht“, welches für die Elektronen-Protonen-Umhüllung gleich 0,5 zu setzen ist.

Da wir die Gravitationswirkung der Umhüllung auf sich selber vernachlässigen wollen, so können wir schreiben:

$$dp = -\frac{GM}{2r^2} q dr.$$

Nach (118) ist aber

$$p = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ und } q = q_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}},$$

welche Werte, in die vorhergehende Gleichung eingeführt, ergeben:

$$\frac{\gamma p_0}{\gamma-1} \cdot \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} dT = -\frac{GM q_0}{2r^2} \cdot \frac{T^{\frac{1}{\gamma-1}}}{T_0^{\frac{1}{\gamma-1}}} dr,$$

oder:

$$\frac{\gamma p_0}{(\gamma-1) T_0} dT = -\frac{GM q_0}{2r^2} dr.$$

Da nach (119) für die Basis der Umhüllung

$$p_0 = 2 \Re q_0 T_0$$

sein muß, so erhält man aus der vorhergehenden Gleichung:

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \Re dT = -\frac{GM}{2r^2} dr,$$

und weiter:

$$\frac{2\gamma \Re}{\gamma-1} \int_{T_{eff}}^{T_0} dT = -\frac{GM}{2} \int_{r_0}^{\frac{1}{r^2}} dr,$$

oder:

$$\frac{2\gamma\Re}{\gamma-1}(T_0 - T_{eff}) = \frac{GM}{2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right),$$

oder:

$$T_0 - T_{eff} = \frac{(\gamma-1)GM}{4\gamma\Re} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Wir dürfen wohl ziemlich genau die wirklichen Verhältnisse wiedergeben, wenn wir in der vorhergehenden Gleichung $\gamma = \frac{4}{3}$ setzen. In diesem Falle erhalten wir:

$$T_0 - T_{eff} = \frac{GM}{16\Re} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (120)$$

In erster Annäherung können wir

$$T_0 - T_{eff} \sim T_0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \sim \frac{1}{r_0}$$

schreiben, und in diesem Falle geht (120) in

$$T_0 = \frac{GM}{16\Re r_0} \quad (121)$$

über.

Bedeutet $L(r)$ die in der Zeiteinheit durch die Kugeloberfläche gehende Nettomenge strahlender Energie, so haben wir:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{3} a T^4 \right) = - \frac{\kappa L(r)}{4\pi c r^2},$$

wo κ den Massenabsorptionskoeffizienten bedeutet¹⁾. Bezeichnet man durch L den gesamten Energieverlust durch Ausstrahlung (in Erg.sec⁻¹), so ist offenbar $L = L(r_0)$, da wir ja die Energieerzeugung außerhalb der Neutronengaskugel vom Radius r_0 vernachlässigen. Wir können in einem solche Falle schreiben:

$$- \frac{d \left(\frac{1}{3} a T^4 \right)}{\kappa Q dr} = \frac{L}{4\pi c r_0^2}.$$

Will man die Stärke eines elektrischen Stromes messen, so genügt es, die einer unendlich kleinen Strecke entsprechende Potentialdifferenz durch den Widerstand dieser kleinen Strecke

1) Vgl. z. B. E. A. Milne, ZS. f. Astrophysik 4, 83, 1932.

zu dividieren. Man kann aber statt dessen auch die gesamte elektromotorische Kraft durch den gesamten Widerstand dividieren. In analoger Weise, statt $-d\left(\frac{1}{3}aT^4\right)$ durch $\kappa_0 dr$ zu dividieren, können wir dividieren $\frac{1}{3}aT_0^4 - \frac{1}{3}aT_{eff}^4$ durch $\frac{\kappa M}{16\pi r_0^2}$ [vgl. (117)]. Dies ergibt:

$$\frac{16\pi ar_0^2 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{3\kappa M} = \frac{L}{4\pi cr_0^2},$$

oder:

$$L = \frac{64\pi^2 acr_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{3\kappa M},$$

oder im Hinblick auf (116):

$$L = \frac{64 \cdot 137^2 \pi^3 ac^3 m_e^2 m_H r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{h^2 M}. \quad (122)$$

Ist N die Avogadrosche Zahl (d. h. die Loschmidtsche Zahl pro Grammatom), so können wir schreiben:

$$N = \frac{1}{m_H} \quad \text{und} \quad m_H = \frac{1}{N} = \frac{k}{\Re};$$

außerdem ist bekanntlich

$$a = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3}.$$

Diese Werte, in (122) eingeführt, ergeben:

$$L = \frac{2^9 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{15 h^5 M \Re}. \quad (123)$$

In erster Annäherung können wir

$$T_0^4 - T_{eff}^4 \sim T_0^4$$

annehmen. Dann erhalten wir aus (123) im Hinblick auf (121):

$$L = \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\Re}\right)^5 G^4 m_e^2 M^3. \quad (124)$$

Dies ist die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung. Diese Formel haben wir auf Grund rein physikalischer Überlegungen abge-

leitet, und sie enthält darum nur rein physikalische Größen. Wir könnten diese Formel selbst dann ableiten, wenn der Himmel ewig bewölkt wäre und die Menschheit nie einen Himmelskörper gesehen hätte.

Nach Birge¹⁾ ist die Gravitationskonstante $G = 6,664 \cdot 10^{-8}$, die Plancksche Konstante $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$, die absolute Gaskonstante $\Re = 8,31360 \cdot 10^7$ und die Boltzmannsche Konstante $k = 1,37089 \cdot 10^{-16}$ (wenn man sämtliche Dezimalstellen in Betracht zieht). Für die Elektronenmasse m_e gibt Birge²⁾ zwei Werte: den „spektroskopischen“ Wert $9,03510 \cdot 10^{-28}$ und den „Deflexionswert“ $8,99425 \cdot 10^{-28}$. Wir akzeptieren das arithmetische Mittel und setzen $m_e = 9,014675 \cdot 10^{-28}$. Diese Werte, in (124) eingeführt, ergeben:

$$L = (\text{Nr} \log \overline{66,1780353}) M^3, \quad (124')$$

oder abgerundet:

$$L = 1,51 \cdot 10^{-66} M^3.$$

M und L der Sonne sind gleich $M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ und $L_{\odot} = 3,780 \cdot 10^{33}$, also ist

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = 1 \text{ und } \frac{1,985 \cdot 10^{33}}{M_{\odot}} = \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^3}{M_{\odot}^3} = 1.$$

Dies gestattet uns die Gleichung (124') folgendermaßen umzugestalten:

$$L \cdot \frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = (\text{Nr} \log \overline{66,1780353}) M^3 \cdot \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^3}{M_{\odot}^3},$$

oder:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = (\text{Nr} \log 0,4938250) \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3, \quad (124'')$$

oder abgerundet:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 3,12 \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^3.$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wieweit die Formel (124) [resp. (124'), oder (124'')] mit der Beobachtung übereinstimmt. Als Beobachtungsmaterial kommen natürlich nur solche Sterne

1) R. T. Birge, l. c. S. 59 und 61.

2) Ebenda, S. 62.

in Betracht, deren Massen und deren absolute bolometrische Helligkeiten genau bekannt sind. Dies ist aber nur bei Doppelsternen der Fall. Vor kurzem hat Nernst eine Liste solcher Sterne veröffentlicht¹⁾. Diese Liste war von K. Pilowski zusammengestellt. Nernst sagt: „Zweifellos ist die Doppelsternbildung an sich ein katastrophaler Prozeß, der die normale Sternentwicklung stört; diese Störung wird aber nicht allzu groß sein, wenn man ... bei Doppelsternen von erheblich verschiedener Masse, Leuchtkraft und Temperatur nur den Hauptstern statistisch berücksichtigt, und bei Doppelsternen gleicher Masse, wenn sich außerdem die maßgebenden Eigenschaften beider Sterne (Temperatur, Leuchtkraft, Dichte) nahe gleich verhalten, beide Komponenten berücksichtigt“²⁾.

Es ist zu bedauern, daß Nernst nicht wenigstens in Klammern die von ihm unterdrückten Daten angeführt hat. Für unsere Ziele wäre eine vollständige Liste viel wünschenswerter als eine noch so gute Auslese. Deshalb habe ich alle die von Nernst gelegentlich erwähnten, aber in seine Liste nicht aufgenommenen Daten wieder eingefügt. Ich habe die 71 Sterne nach abnehmender (beobachteter) Helligkeit geordnet. Von diesen Sternen sind 52 heller als die Sonne, und sie sind zusammengefaßt in Tabelle 12. Die folgende Tabelle 13 enthält die übrigen 19 Sterne, deren (absolute bolometrische) Helligkeit gleich oder geringer als die Sonnenhelligkeit ist.

Sehen wir uns zuerst die Tabelle 12 an, welche hellere Sterne als die Sonne enthält. Aus der letzten Kolumne dieser Tabelle läßt sich die Diskrepanz zwischen den berechneten und den beobachteten Werten ansehen. Bei genauer Übereinstimmung zwischen Berechnung und Beobachtung müßte der Logarithmus des Verhältnisses der beiden Werte gleich Null sein. Ein positiver Logarithmus sagt aus, daß der berechnete Wert größer als der beobachtete ist; ein negativer Logarithmus bedeutet das Umgekehrte. Den größten Logarithmus (0,9611767) weist ξ Aur₂ auf; die diesem Logarithmus entsprechende Zahl ist 9,11449. Sie besagt, daß der berechnete Wert mehr als 9 mal größer ist als der beobachtete. Den kleinsten Logarithmus (2,7511721) besitzt λ Tauri; die entsprechende Zahl beträgt 0,056390. Sie bedeutet, daß der

1) W. Nernst, ZS. f. Phys. **97**, 514 f., 1935.

2) Ebenda, S. 512.

Vielleicht wird mancher Leser über die Anwendung von siebenstelligen Logarithmen in der letzten Kolumne der Tabelle 12 erstaunt sein. — Die Sache ist die, daß eine befriedigende Diskussion über die Genauigkeit der Beobachtungsdaten viel Zeit und Raum verlangt hätte. Deshalb haben wir der Einfachheit halber sämtliche Beobachtungsdaten als absolut genau angenommen, und haben diese Annahme durch Anwendung von siebenstelligen Logarithmen bloß markieren wollen.

Statt $\frac{L}{L_{\odot}}$ aus beobachtetem $\frac{M}{M_{\odot}}$, könnten wir $\frac{M}{M_{\odot}}$ aus beobachtetem $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnen und das gewonnene Resultat mit dem beobachteten $\frac{M}{M_{\odot}}$ vergleichen. Ein solches „umgekehrtes“ Verfahren würde eine sehr viel kleinere „Dispersion“ der Werte ergeben, als das „direkte“.

Die Ursache dieser Dispersion liegt offenbar darin, daß die von uns gemachten Voraussetzungen (z. B. die genaue Gleichheit der Neutronen- und der Protonenzahl) nur durchschnittlich richtig sind. Auch die große Ungenauigkeit der Beobachtungsdaten bei einigen Sternen mag hier eine Rolle spielen (wir haben ja bloß „der Einfachheit halber“ alle Beobachtungsdaten als absolut genau angenommen).

Tabelle 12.

| Name des Sterns | $\frac{M}{M_{\odot}}$ | $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'') | $\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet | Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten |
|----------------------|-----------------------|---|-------------------------------------|--|
| AO Cas ₁ | 36,3 | 149120 | 140000 | 0,0274168 |
| AO Cas ₂ | 33,8 | 120390 | 50000 | 0,3816051 |
| ζ Aur ₁ | 29,3 | 78420 | 13000 | 0,7804844 |
| V Pup ₁ | 21,2 | 29705 | 9800 | 0,4816066 |
| V Pup ₂ | 16,3 | 13502 | 5100 | 0,4228176 |
| Y Cyg ₁ | 17,6 | 16997 | 5000 | 0,5313931 |
| Y Cyg ₂ | 17,4 | 16424 | 3600 | 0,6591701 |
| λ Tauri | 3,7 | 157,92 | 2800 | 2,7512721 |
| u Her | 7,5 | 1315,3 | 2000 | 1,8179789 |
| AG Per ₁ | 5,2 | 438,36 | 1500 | 1,4657436 |
| Z Vul | 4,8 | 344,79 | 910 | 1,5785072 |
| U Oph ₁ | 5,4 | 490,92 | 800 | 1,7879164 |
| U Oph ₂ | 4,7 | 323,68 | 690 | 1,6712696 |
| RS Vul | 4,6 | 303,46 | 660 | 1,6625545 |
| ζ Aur ₂ | 12,4 | 5944,2 | 650 | 0,9611767 |
| T Aql ₁ | 6,2 | 743,02 | 650 | 0,0580867 |
| Algol | 4,6 | 303,46 | 600 | 1,7039471 |
| U Sge | 6,7 | 937,67 | 580 | 0,2086214 |
| AG Per ₂ | 4,6 | 303,46 | 580 | 1,7186704 |
| T Aql ₂ | 5,1 | 413,56 | 480 | 1,9352944 |
| U Cr B | 5,1 | 413,56 | 360 | 0,0602331 |
| δ Librae | 1,9 | 21,384 | 290 | 2,8676878 |
| β Aur ₁ | 2,4 | 43,098 | 200 | 1,3334286 |
| β Aur ₂ | 2,4 | 43,098 | 200 | 1,3334286 |
| Capella ₁ | 4,2 | 230,98 | 115 | 0,3028751 |
| RX Her ₁ | 2,2 | 33,197 | 85 | 1,5916742 |
| RX Her ₂ | 1,9 | 21,384 | 85 | 1,4006669 |
| Capella ₂ | 3,3 | 112,04 | 76 | 0,1685531 |

Tabelle 12 (Fortsetzung).

| Name des Sterns | $\frac{M}{M_{\odot}}$ | $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'') | $\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet | Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten |
|---------------------------|-----------------------|---|-------------------------------------|--|
| TV Cas | 1,9 | 21,384 | 63 | $\bar{1},5307453$ |
| TX Her ₁ | 2,1 | 28,872 | 53 | $\bar{1},7362070$ |
| X Tri | 2,9 | 76,036 | 50 | 0,1820490 |
| RZ Cas | 1,3 | 6,8494 | 50 | $\bar{1},1366852$ |
| ξ U Ma A ₁ | 3,8 | 171,07 | 46 | 0,5704180 |
| Sirius | 2,6 | 54,795 | 45 | 0,0855324 |
| ϵ Hydrae | 1,75 | 16,708 | 40 | $\bar{1},6208790$ |
| WW Aur ₁ | 2,2 | 33,197 | 35 | $\bar{1},9770251$ |
| TX Her ₂ | 1,8 | 18,182 | 30 | $\bar{1},7825212$ |
| ξ U Ma A ₂ | 3,8 | 171,07 | 29 | 0,7707778 |
| WW Aur ₂ | 1,9 | 21,384 | 27 | $\bar{1},8987220$ |
| ξ_1 Sco ₁ | 1,57 | 12,065 | 7,5 | 0,2064628 |
| Prokyon | 1,5 | 10,522 | 5,9 | 0,2512469 |
| ξ Her | 1,5 | 10,522 | 5,4 | 0,2897051 |
| ξ_1 Sco ₂ | 1,57 | 12,065 | 5,4 | 0,3491303 |
| j Vir ₁ | 1,54 | 11,386 | 5,0 | 0,3574171 |
| j Vir ₂ | 1,54 | 11,386 | 4,9 | 0,3661910 |
| ξ Cri A | 1,16 | 4,8663 | 2,7 | 0,2558352 |
| 99 Her | 1,64 | 13,752 | 2,6 | 0,7233831 |
| AR Lacertae ₁ | 1,41 | 8,7394 | 2,5 | 0,5435423 |
| AR Lacertae ₂ | 1,42 | 8,9267 | 2,2 | 0,6082672 |
| ξ Cri B | 1,16 | 4,8663 | 1,4 | 0,5410710 |
| β 648 | 0,83 | 1,7826 | 1,4 | 0,1049313 |
| η Cr B ₁ | 0,71 | 1,1159 | 1,2 | $\bar{1},9684187$ |

Der durchschnittliche Wert des erwähnten
Logarithmus:

0,0292547

Tabelle 13.

| Name des Sterns | $\frac{M}{M_{\odot}}$ | $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'') | $\frac{L}{L_{\odot}}$ beobachtet | Logarithmus des Verhältnisses des berechneten Wertes zu dem beobachteten |
|---|-----------------------|---|-------------------------------------|--|
| Sonne | 1 | 3,1176 | 1 | 0,4938250 |
| WU Ma ₁ | 0,70 | 1,0693 | 0,98 | 0,0378929 |
| WU Ma ₂ | 0,50 | 0,38970 | 0,98 | 1,5995089 |
| η Cas | 1,00 | 3,1176 | 0,87 | 0,5543057 |
| η Cr B ₂ | 0,71 | 1,1158 | 0,74 | 0,1783682 |
| 9 Arg ₁ | 0,77 | 1,4233 | 0,69 | 0,3144480 |
| 70 Oph ₁ | 0,93 | 2,5077 | 0,60 | 0,6211224 |
| i Boo ₁ | 0,64 | 0,81727 | 0,47 | 0,2402671 |
| i Boo ₂ | 0,64 | 0,81727 | 0,47 | 0,2402671 |
| 9 Arg ₂ | 0,55 | 0,51870 | 0,40 | 0,1128531 |
| 70 Oph ₂ | 0,70 | 1,0693 | 0,20 | 0,7280890 |
| YY Gem ₁ | 0,63 | 0,77955 | 0,056 | 1,1436585 |
| YY Gem ₂ | 0,57 | 0,57736 | 0,047 | 1,0893518 |
| B Her | 0,40 | 0,19953 | 0,031 | 0,8086433 |
| C Her | 0,32 | 0,10216 | 0,020 | 0,7082450 |
| Krüger 60 ₁ | 0,25 | 0,048713 | 0,011 | 0,6462523 |
| O ₂ Eri B | 0,46 | 0,30346 | 0,0096 | 1,4998272 |
| O ₂ Eri C | 0,23 | 0,037932 | 0,0060 | 0,8008571 |
| Krüger 60 ₂ | 0,21 | 0,028872 | 0,0037 | 0,8922815 |
| Der durchschnittliche Wert des erwähnten Logarithmus: | | | | 0,5636876 |

beobachtete Wert beinahe 18 mal größer ist als der berechnete. Dieser Stern ist aber eine Ausnahme. Bei allen anderen Sternen ist die Diskrepanz zwischen Berechnung und Beobachtung kleiner, und meistens sogar sehr viel kleiner. Das arithmetische Mittel aus allen 52 Logarithmen ist 0,0292547. Diesem „durchschnittlichen“ Logarithmus entspricht die Zahl $1,0697 \sim 1,07$, welche besagt, daß die berechnete Helligkeit im

Durchschnitt um 7% größer ist als die beobachtete. Wir glauben den Schluß ziehen zu dürfen, daß die Richtigkeit unserer neuen Massen-Helligkeits-Formel (124) durch die Beobachtung bestätigt worden ist, weil eine durchschnittliche Diskrepanz von nur 7% als sehr gering betrachtet werden muß. Das Gesagte bezieht sich aber nur auf die helleren Sterne.

Wenden wir uns jetzt der Tabelle 13 zu, welche 19 Sterne enthält, deren (absolute bolometrische) Helligkeit gleich oder kleiner als die Sonnenhelligkeit ist. Das arithmetische Mittel aus allen 19 Logarithmen ist 0,5636876, was der Zahl 3,6617 entspricht. Dies bedeutet, daß die berechnete Helligkeit im Durchschnitt beinahe 3,7 mal größer ist als die beobachtete. Daraus folgt, daß unsere Formel (124) für dunklere Sterne unbrauchbar ist.

Das durch unsere Formel (124) repräsentierte M^3 -Gesetz der absoluten bolometrischen Helligkeit ist nicht neu. Schon Jeans macht darauf aufmerksam, daß das M^3 -Gesetz mit der Beobachtung gut übereinstimmt¹⁾. Während aber Jeans das M^3 -Gesetz als ein rein empirisches betrachtet, haben wir dies Gesetz rein theoretisch abgeleitet. Außerdem haben wir auch den annähernd richtigen Koeffizienten von M^3 auf rein theoretischem Wege abgeleitet. Das Gesagte bezieht sich aber, wie schon oben erwähnt worden ist, nur auf nicht zu dunkle Sterne.

Die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung.

Das „Russell-Diagramm“.

In zweiter Annäherung können wir T_{eff} neben T_0 nicht mehr vernachlässigen; desgleichen nicht $\frac{1}{r_1}$ neben $\frac{1}{r_0}$. Das Eliminieren von T_0 aus (120) und (123) ergibt:

$$L = \frac{2^9 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 r_0^4}{15 h^5 \Re M} \left\{ \left[\frac{GM}{16 \Re} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right) + T_{eff} \right]^4 - T_{eff}^4 \right\}. \quad (125)$$

Wir haben oben gesehen (S. 81), daß man den meisten Sternen ein Alter von etwa 3 Milliarden Jahren zuschreiben kann, also rund gerechnet 10^{17} Sekunden. Während dieser Zeit hat

1) J. H. Jeans, Astronomy and Cosmogony, S. 126 f.

der Stern im ganzen $10^{17} L$ Erg ausgestrahlt. Nach unserer Auffassung wird dieser Energieverlust nur durch die Kontraktionsenergie der Neutronengaskugel gedeckt, da man die Kontraktionsenergie der Elektronen-Protonen-Umhüllung vernachlässigen kann. Die Masse der Neutronengaskugel beträgt $0,5 M$, wenn M die Masse des ganzen Sterns bedeutet. Wenn wir der Einfachheit halber der Neutronengaskugel einen homogenen Bau zuschreiben, so beträgt ihre Kontraktionsenergie

$$\frac{3 G (0,5 M)^2}{5 r_0} = \frac{3 G M^2}{20 r_0}.$$

Wir haben aber schon oben gesehen (S. 77), daß von dieser Energie nur ungefähr die Hälfte (d. h. $\frac{3 G M^2}{40 r_0}$) ausgestrahlt wird, während die andere Hälfte im Sterne verbleibt. Wir können also schreiben:

$$\frac{3 G M^2}{40 r_0} = 10^{17} L,$$

oder:

$$r_0 = \frac{3 G M^2}{4 \cdot 10^{18} L}. \quad (126)$$

Andererseits haben wir:

$$L = 4 \pi r_1^2 \sigma T_{eff}^4,$$

oder:

$$r_1 = \frac{L^{1/2}}{2 \pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}, \quad (127)$$

wenn σ die Stephansche Konstante bedeutet. Führt man die Werte von r_0 und r_1 aus (126) und (127) in (125) ein, so erhält man die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung:

$$L = \frac{108.137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{10^{73} h^5 \Re} \left\{ \left[\frac{GM}{8 \Re} \left(\frac{2 \cdot 10^{18}}{3 G M^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right) + \frac{T_{eff}}{L} \right]^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right\}. \quad (128)$$

Wie wir sehen, ist die absolute bolometrische Helligkeit L in zweiter Annäherung nicht mehr eine Funktion von M allein, sondern von M und T_{eff} .

Die Stefansche Konstante σ ist nach experimenteller Ermittlung gleich $5,735 \cdot 10^{-5}$ und nach indirekter Berechnung gleich $5,7139 \cdot 10^{-5}$, wie Birge es angibt¹⁾. Da wir aber oben für die Strahlungskonstante a den indirekten Ausdruck benutzt haben, müssen wir konsequenterweise den indirekt berechneten Wert von σ akzeptieren. Dann geht (128) über in

$$L = (\text{Nr log } 102,1739164) M^7 \left\{ \left[(\text{Nr log } 16,0008559) M \left(\frac{\text{Nr log } 25,0001737}{M^2} - \frac{(\text{Nr log } 2,1270412) T_{eff}^2}{L^{3/2}} + \frac{T_{eff}}{L} \right)^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right] \right\}. \quad (128')$$

Wir wollen (128') für die Sonnenmasse berechnen, d. h. wir wollen $M = M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ setzen. Dies ergibt:

$$L = (\text{Nr log } 131,2582399) \left\{ \left[\text{Nr log } 17,2986164 \left(2,5389415 \cdot 10^{-42} - \frac{(\text{Nr log } 2,1270412) T_{eff}^2}{L^{3/2}} + \frac{T_{eff}}{L} \right)^4 - \left(\frac{T_{eff}}{L} \right)^4 \right] \right\}. \quad (128'')$$

Für $T_{eff} = 2000$ ergibt (128'') zwei Werte:

$$L = 1,1784 \cdot 10^{34} \text{ und } L = 8,8 \cdot 10^{30}.$$

Wir wollen die erstere Lösung als die g -Lösung, und die letztere als die d -Lösung bezeichnen. Führt man in (127) die Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$r_1 = \frac{L}{(\text{Nr log } 2,1270412) T_{eff}^2}. \quad (129)$$

Führt man in (129) die g -Lösung von (128''), d. h. $L = 1,1784 \cdot 10^{34}$, ein, so erhält man $r_1 = 1,01 \cdot 10^{12}$. Letzterer Wert gestattet das Volumen und also auch die durchschnittliche Dichte zu berechnen, welche sich gleich $\bar{\varrho} = 4,6 \cdot 10^{-4} \text{ g.cm}^{-3}$ erweist. Die d -Lö-

1) R. T. Birge, l. c. S. 61.

sung von (128''), d. h. $L = 8,8 \cdot 10^{30}$, ergibt $r_1 = 2,77 \cdot 10^{10}$ und $\bar{q} = 22$. In Tabelle 14 sind die g - und d -Lösungen der Gleichung (128'') für verschiedene Werte von T_{eff} aufgeführt.

Tabelle 14.

| T_{eff} | g -Lösungen der Gleichung (128'') | | | d -Lösungen der Gleichung (128'') | | |
|--------------------|---|----------------------|---------------------------------|---|----------------------|---------------------------------|
| | absolute bolometr. Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹) | Radius (in cm) | Dichte (in g.cm ⁻³) | absolute bolometr. Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹) | Radius (in cm) | Dichte (in g.cm ⁻³) |
| 2000 ⁰ | $1,178 \cdot 10^{34}$ | $1,01 \cdot 10^{12}$ | $4,6 \cdot 10^{-4}$ | $8,8 \cdot 10^{30}$ | $2,77 \cdot 10^{10}$ | 22 |
| 4000 ⁰ | $1,178 \cdot 10^{34}$ | $2,53 \cdot 10^{11}$ | 0,029 | $2,2 \cdot 10^{31}$ | $1,11 \cdot 10^{10}$ | 350 |
| 6000 ⁰ | $1,177 \cdot 10^{34}$ | $1,13 \cdot 10^{11}$ | 0,33 | $4,0 \cdot 10^{31}$ | $6,53 \cdot 10^9$ | 1700 |
| 8000 ⁰ | $1,177 \cdot 10^{34}$ | $6,33 \cdot 10^{10}$ | 1,9 | $6,0 \cdot 10^{31}$ | $4,50 \cdot 10^9$ | 5200 |
| 10000 ⁰ | $1,177 \cdot 10^{34}$ | $4,05 \cdot 10^{10}$ | 7,1 | $8,2 \cdot 10^{31}$ | $3,38 \cdot 10^9$ | 12000 |
| 12000 ⁰ | $1,176 \cdot 10^{34}$ | $2,81 \cdot 10^{10}$ | 21 | $1,0 \cdot 10^{32}$ | $2,63 \cdot 10^9$ | 26000 |

Sehen wir uns diese Tabelle etwas näher an. Bei niedriger effektiver Temperatur kann der Stern entweder sehr ausgedehnt oder sehr kompakt sein, wobei im ausgedehnten Zustande seine absolute bolometrische Helligkeit sehr viel größer ist als im kompakten Zustande. Die g -Lösung entspricht einer „Riesen“-Natur und die d -Lösung einer „Zwerg“-Natur. Je höher aber die effektive Temperatur steigt, desto weniger ausgesprochen ist die „Riesen“-Natur der g -Lösung. In der g -Reihe fällt mit steigender effektiver Temperatur die absolute Helligkeit des Sterns, aber so unmerklich langsam, daß man sie als konstant betrachten kann. In der d -Reihe hingegen steigt die absolute bolometrische Helligkeit mit der effektiven Temperatur, und zwar recht schnell. Alle diese Anzeichen sprechen scheinbar dafür, daß wir in der g -Reihe das „Riesen“-Stadium und in der d -Reihe das „Zwerg“-Stadium zu sehen haben. Dies ist aber in Wirklichkeit nur bis zu einem gewissen Grade der Fall. Gewöhnlich haben ja „Riesen“ eine bedeutend größere Masse als „Zwerge“; die Tabelle 14 hingegen stellt nur die theoretisch möglichen Zustände dar, welche ein Stern von der Sonnenmasse annehmen kann. Aber aus dieser Tabelle ist nicht zu ersehen, welcher von den vielen möglichen Zuständen

mehr und welcher weniger wahrscheinlich ist. Damit ein Stern sehr ausgedehnt sei, muß die Temperatur T_0 an der Grenze zwischen der Neutronengaskugel und der Elektronen-Protonen-Umhüllung nahe der „Zerstreuungstemperatur“ sein, also nahe der maximalen zulässigen Temperatur an jenem Orte. Ist aber die Masse des Sterns für eine genügend gute Ausbildung der Neutronengaskugel zu klein, so wird T_0 beträchtlich niedriger als die „Zerstreuungstemperatur“ sein, weshalb auch die Ausdehnung des Sterns nur eine geringe sein kann. Deshalb müßten wir erwarten, daß die g -Lösungen Sternen großer Masse entsprechen und die d -Lösungen Sternen kleiner Masse. Bei Sternen mittlerer Masse könnte man sowohl g -Lösungen als auch d -Lösungen erwarten. Diese Regel darf aber keinesfalls als eine absolut richtige angesehen werden. Was die untersten Glieder der d -Reihe anbetrifft (mit extrem hoher effektiver Temperatur T_{eff}), so sind ihre durchschnittlichen Dichten $\bar{\rho}$ ungeheuer. Diese Glieder der d -Reihe bilden offenbar die Klasse der weißen Zwerge.

Es ist zu beachten, daß bei den oberen Gliedern der g -Reihe (mit niedriger effektiver Temperatur) die geringste Variation der absoluten bolometrischen Helligkeit eine bedeutende Expansion (oder Kontraktion) des Sterns hervorrufen muß. Daraus folgt, daß rote Riesen wenig stabil und zum Pulsieren geneigt sein müssen.

Die traditionelle Einteilung der Sterne in Riesen und Zwerge deckt sich durchaus nicht mit unserer neuen Einteilung in g - und d -Sterne. So z. B. ist die Sonne (deren effektive Temperatur man gleich rund 6000° annehmen darf) zwar ein Zwerg, aber ein g -Zwerg. Wäre die Sonne ein d -Zwerg, so müßte nach Tabelle 14 ihre durchschnittliche Dichte etwa 1000 mal größer, und ihre absolute bolometrische Helligkeit etwa 100 mal kleiner sein als die Beobachtungen zeigen. In Wirklichkeit ist aber die Sonne nur 3,12 mal dunkler als ein „normaler“ g -Stern, dessen Masse gleich der Sonnenmasse ist.

Die Gleichung (120) zeigt, daß bei

$$T_0 = \frac{GM}{16 R r_0}$$

der Sternradius $r_1 = \infty$ ist, also ist auch $\frac{r_1}{r_0} = \infty$. Dieser kritische Wert von T_0 kann als „Zerstreuungstemperatur“ bezeichnet

werden, weil der Stern sich bis zur Unendlichkeit ausdehnt. Je näher T_0 der Zerstreuungstemperatur ist, desto größer muß natürlich auch $\frac{r_1}{r_0}$ sein. Es ist ein sehr naheliegender Gedanke, daß bei einem Stern von größerer Masse auch größere Werte von $\frac{r_1}{r_0}$ entstehen können, weil ja bei einem solchen Stern T_0 wahrscheinlich leichter an die Zerstreuungstemperatur heranrücken kann, als bei kleineren Sternen mit einer schlechter entwickelten und darum wohl etwas kälteren Neutronengaskugel.

Es seien gegeben drei ideale g -Sterne mit den Massen $2 \cdot 10^{34}$, $2 \cdot 10^{33}$ und $2 \cdot 10^{32}$, wobei alle drei Sterne der Gleichung (124) streng folgen. Der Radius r_0 der Neutronengaskugel des ersten Sternes sei gleich $2 \cdot 10^6$, was nicht weit von der Wahrheit ist, wenn man dem Stern ein Alter von etwa 3 Milliarden Jahren zuschreibt. Die Masse des zweiten Sterns ist 10 mal kleiner, deshalb muss nach (124) dieser Stern im Verlaufe derselben Zeitspanne von etwa 3 Milliarden Jahren 1000 mal weniger Energie ausgestrahlt haben. Nun ist aber die ausgestrahlte Energie proportional der Kontraktionsenergie, welche ihrerseits proportional dem Quadrate der Masse und umgekehrt proportional dem Radius ist. Wenn der Stern von der Masse $2 \cdot 10^{33}$ sich bis $r_0 = 2 \cdot 10^7$ zusammenzieht, so ist die entsprechende Kontraktionsenergie 1000 mal kleiner als im Falle eines Sternes von der Masse $2 \cdot 10^{34}$, der sich bis $r_0 = 2 \cdot 10^6$ zusammenzieht. Wir müssen daher bei dem ersten Stern $r_0 = 2 \cdot 10^6$ annehmen, bei dem zweiten $r_0 = 2 \cdot 10^7$ und bei dem dritten $r_0 = 2 \cdot 10^8$. Außerdem wollen wir annehmen, daß der erste und größte Stern die Fähigkeit hat sich höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^7$ auszudehnen, der zweite höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^4$ und der dritte höchstens bis $\frac{r_1}{r_0} = 10^2$.

Daraus folgt, daß der maximale zulässige Radius des ersten Sterns gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{13}$ ist, derjenige des zweiten gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{11}$ und derjenige des dritten gleich $r_1 = 2 \cdot 10^{10}$. Wenn wir nun L aus (124) [resp. aus (124')] berechnen, so können wir auch T_{eff} finden. Die entsprechenden Zahlen sind in Tabelle 15 zusammengestellt. Diese Tabelle zeigt, daß mit abnehmender Masse sowohl die relative als auch die absolute Fähigkeit sich auszudehnen ebenfalls abnimmt. Die untere Grenze der effektiven Temperatur hingegen nimmt zuerst zu, und dann wieder ab.

Tabelle 15.

| Masse des Sterns (in Gramm) | Relative Fähigkeit sich auszudehnen | Absolute Fähigkeit sich auszudehnen | Durchschnittliche Dichte des einzelnen Sterns (in g.cm ⁻³) | Absolute bolometrische Helligkeit (in Erg.sec ⁻¹) | Effektive Temperatur der Oberfläche |
|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|---|--|-------------------------------------|
| 2.10 ³⁴ | $\frac{r_1}{r_0} \leq 10^7$ | $r_1 \leq 2.10^{13}$ | $\bar{\rho} \geq 1,19.10^{-6}$ | 1,21.10 ³⁷ | $T_{eff} \geq 2545^0$ |
| 2.10 ³³ | $\frac{r_1}{r_0} \leq 10^4$ | $r_1 \leq 2.10^{11}$ | $\bar{\rho} \geq 0,119$ | 1,21.10 ³⁴ | $T_{eff} \geq 4526^0$ |
| 2.10 ³² | $\frac{r_1}{r_0} \leq 10^2$ | $r_1 \leq 2.10^{10}$ | $\bar{\rho} \geq 11,9$ | 1,21.10 ³¹ | $T_{eff} \geq 2545^0$ |

Wir sehen, daß niedrige effektive Temperaturen entweder bei sehr großen, hellen und wenig dichten, oder bei sehr kleinen, dunklen und dichten Sternen möglich sind; bei Sternen von mittlerer Masse und Helligkeit ist eine niedrige effektive Temperatur unmöglich. Wir glauben, daß auf eine ähnliche Weise das bekannte „Russell-Diagramm“ erklärt werden kann.

Gewöhnlich wird angenommen, daß ein jeder Stern sein „Leben“ als roter Riese beginnt und dann die Harvardreihe *MKG FAB* mit nahezu gleicher, sehr großer absoluter Helligkeit durchläuft, bis er bei einer gewissen Dichte das Temperaturmaximum erreicht. Von da ab sinkt seine Temperatur, wobei der Stern die Harvardreihe noch einmal, aber in umgekehrter Folge von *B* nach *M* durchläuft. Mit der Abnahme der effektiven Temperatur geht Hand in Hand eine Verringerung der Oberfläche, weshalb die absolute bolometrische Helligkeit äußerst schnell sinkt.

Wir lehnen eine solche Theorie auf das entschiedenste ab. Die Annahme einer unveränderlichen absoluten bolometrischen Helligkeit während des Riesenstadiums beruht auf folgendem stillschweigenden Syllogismus: „Die Wirkung der Verkleinerung der Oberfläche wird durch die Erhöhung der effektiven Temperatur annähernd kompensiert; deshalb bleibt die absolute bolometrische Helligkeit des Sterns beinahe unverändert. Selbstverständlich gilt diese Regel der Kompensation nur dann, wenn die Masse des Sterns sich nicht verändert. Also (??) müssen Masse und absolute bolometrische Helligkeit eines Sterns wäh-

rend seines Riesenstadiums beinahe unverändert bleiben“. — Mir will die Logik dieses von den meisten Forschern stillschweigend angenommenen Syllogismus nicht einleuchten. Warum könnte z. B. unsere Sonne nicht als M -Riese mit einer Masse gleich $100 M_{\odot}$ ihr „Leben“ begonnen haben, um sich dann der Reihe nach in einen K -Riesen von der Masse $80 M_{\odot}$, in einen G -Riesen von der Masse $60 M_{\odot}$ usw. zu verwandeln? In einem solchen Falle wäre aber die absolute bolometrische Helligkeit während des Riesenstadiums nicht konstant, sondern in hohem Grade veränderlich. Und was zwingt uns, nur bei der Zwergreihe eine Massenabnahme (von B nach M) zuzulassen und trotzdem diese Reihe als eine genetische anzusehen? Uns scheint eine solche Annahme unbegründet zu sein, und wir betrachten die Zwergreihe nicht als eine Folge verschiedener Entwicklungsstadien, die ein jeder Stern zu durchlaufen hat, sondern als eine Reihe unabhängiger Sterne nach abnehmender effektiver Temperatur geordnet. Nach dem „Russell-Diagramm“ weisen Zwerge von niedrigerer effektiver Temperatur eine durchschnittlich geringere Masse auf; eine Verringerung der Masse muß aber nach (124) eine Verringerung der Helligkeit zur Folge haben. Somit nimmt in der Zwergreihe von B bis M nicht nur die effektive Temperatur, sondern auch die Masse und also auch die absolute bolometrische Helligkeit ab. Dies alles hat mit irgendeinem „Abkühlungsprozeß“ gar nichts zu tun. Natürlich wollen wir nicht leugnen, daß im Verlaufe der 3 Milliarden Jahre (wenn man die „kurze Zeitskala“ akzeptiert) die Sterne sich mehr oder weniger verändert haben können. Trotzdem lehnen wir es ab, sei es in der Riesenreihe, sei es in der Zwergreihe eine genetische Reihe zu sehen.

Will man trotzdem die Massenabnahme (von B nach M) in der Zwergreihe dadurch erklären, daß der Stern im Verlaufe seines „Lebens“ immer mehr und mehr von seiner Masse ausgestrahlt hat, so müßte man dabei mit solchen Zeiträumen rechnen, die mit der jetzt herrschenden Annahme einer „kurzen Zeitskala“ völlig unvereinbar wären. Nernst glaubt eine große Massenabnahme mit der „kurzen Zeitskala“ dadurch versöhnen zu können, daß er einen Massenschwund auch ohne gleichzeitig auftretende Strahlung für möglich hält ¹⁾. Uns scheint aber eine solche Theorie zu kühn zu sein, um ihr folgen zu können.

1) W. Nernst, l. c. S. 527.

Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für weisse Zwerge. Vergleich der nach dieser Formel berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beobachteten.

Wenden wir uns wieder der Gleichung (128) zu. Eine g -Lösung dieser Gleichung entspricht solchen Werten von L , bei denen das erste Glied in dem Klammerausdruck

$$\left(\frac{2.10^{18}}{3GM^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right) \quad (130)$$

sehr viel größer als das zweite ist. Dies trifft besonders bei kleinen Werten von T_{eff} zu. Wenn wir im äußersten Falle die effektive Temperatur ganz vernachlässigen und $T_{eff} \sim 0$ setzen, so geht (128) in

$$\begin{aligned} L &= \frac{108.137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{10^{73} h^5 \Re} \left[\frac{GM}{8\Re} \left(\frac{2.10^{18}}{3GM^2} \right) \right]^4 = \\ &= \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\Re} \right)^5 G^4 m_e^2 M^3 \end{aligned}$$

über, was mit (124) identisch ist. Somit stellt (124) nichts anderes dar, als die „extremste“ g -Lösung der Gleichung (128).

Eine d -Lösung der Gleichung (128) entspricht solchen Werten von L , bei denen beide Glieder des Klammerausdrucks (130) von ähnlicher Größenordnung sind. In erster Annäherung können wir sie einfach gleichsetzen und schreiben:

$$\frac{2.10^{18}}{3GM^2} = \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}},$$

oder:

$$L = 10^{-12} (2,25 \pi \sigma G^2)^{1/3} (MT_{eff})^{4/3}. \quad (131)$$

Dies ist die Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für d -Zwerge, zu denen die weißen Zwerge gehören. Für g -Zwerge hingegen ist diese Formel untauglich, und es muß bei ihnen die frühere Formel (124) benutzt werden.

Die Einführung der entsprechenden Zahlenwerte in (131) ergibt:

$$L = (\text{Nr} \log 18,0845783) (MT_{\text{eff}})^{4/3}, \quad (131')$$

oder abgerundet:

$$L = 1,22 \cdot 10^{-18} (MT_{\text{eff}})^{4/3}.$$

Nun ist

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33}}{L_{\odot}} = 1 \text{ und } \frac{1,985 \cdot 10^{33}}{M_{\odot}} = \frac{(1,985 \cdot 10^{33})^{4/3}}{M_{\odot}^{4/3}} = 1.$$

Dies gestattet uns die Gleichung (131') folgendermaßen umzugestalten:

$$\frac{3,780 \cdot 10^{33} L}{L_{\odot}} = (\text{Nr} \log 18,0845783) \left(\frac{1,985 \cdot 10^{33} MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3},$$

oder:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = (\text{Nr} \log 8,9041005) \left(\frac{MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3}, \quad (131'')$$

oder abgerundet:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 8,02 \cdot 10^{-8} \left(\frac{MT_{\text{eff}}}{M_{\odot}} \right)^{4/3}.$$

Wie wir sehen, stellt (131) die „extremste“ d -Lösung der Gleichung (128) dar. Während nach (124) bei einem g -Stern seine absolute bolometrische Helligkeit in erster Annäherung von der effektiven Temperatur unabhängig ist, trifft dies nach (131) bei den d -Sternen sogar in erster Annäherung nicht zu.

Um die Richtigkeit der Formel (131) prüfen zu können, müssen wir möglichst genaue Beobachtungsdaten hinsichtlich M , L und T_{eff} der weißen Zwerge zur Verfügung haben. In dieser Hinsicht kommen für uns nur zwei weiße Zwerge in Betracht: $O_2 \text{ Eri B}^1)$ und Sirius B. Die wohl sichersten Beobachtungsdaten hinsichtlich dieser beiden Sterne finden wir bei Kuiper²⁾; ich habe sie in folgender kleinen Tabelle zusammengefaßt:

1) So wird dieser Stern bezeichnet u. a. von E. C. Stoner [Phil. Mag. (7), 68, 1929] und von S. Chandrasekhar (ZS. f. Astrophys. 3, 302, 1931). G. P. Kuiper (Publ. Astron. Soc. Pacific. 46, 288, 1934) hingegen bezeichnet ihn durch $o_2 \text{ Eri B}$ und H. Siedentopf (Astron. Nachr. 243, 4, 1931) durch $o^2 \text{ Eri B}$.

2) G. P. Kuiper, Publ. Astron. Soc. Pacific 46, 288, 1934.

Tabelle 16.

| Name des Sterns | Spektralklasse | Radius (in Einheiten des Erdradius) | Dichte (in g.cm ⁻³) | $\frac{M}{M_{\odot}}$ |
|----------------------|----------------|---|------------------------------------|-----------------------|
| O ₂ Eri B | A0 | 2,1 | 2,0.10 ⁵ | 0,455 |
| Sirius B | F0 | 3,5 | 4,3.10 ⁴ | 0,934 |

Sowohl Stoner ¹⁾ als auch Chandrasekhar ²⁾ zählen O₂ Eri B derselben Spektralklasse A0 zu und setzen die effektive Temperatur gleich 11200°. Nernst und Pilowski hingegen nehmen den etwas höheren Wert von 11650° an, den auch wir akzeptieren wollen; außerdem setzen sie $\frac{L}{L_{\odot}}$ gleich 0,0096. Was Sirius B anbetrifft, so zählt Stoner diesen Stern der Spektralklasse A7 zu und schätzt die effektive Temperatur auf 8000°. Wir aber wollen mit Kuiper diesen Stern der Klasse F0 zurechnen, was einer etwas niedrigeren effektiven Temperatur entspricht. Wir glauben kaum einen sehr großen Fehler zu begehen, wenn wir $T_{eff} = 7900^{\circ}$ annehmen. Setzt man den Erdradius gleich $6,4 \cdot 10^8$ cm, so ist nach Kuiper der Radius von Sirius B gleich

$$r_1 = 3,5 \cdot 6,4 \cdot 10^8 = 2,24 \cdot 10^9 \text{ cm,}$$

und dies ergibt nach elementaren Rechnungen:

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 0,0037,$$

was wir als den zuverlässigsten Beobachtungswert von $\frac{L}{L_{\odot}}$ ansehen wollen.

Die Tabelle 17 gestattet uns, die nach (124'') und nach (131'') berechneten Werte mit den beobachteten zu vergleichen. Wie wir sehen, ist die Gleichung (124'') bei *d*-Sternen völlig unbrauchbar, wie es auch zu erwarten war. Aus der letzten Kolumne der Tabelle 17 läßt sich die Diskrepanz zwischen den nach (131'') berechneten und den beobachteten Werten ersehen.

1) E. C. Stoner, Phil. Mag. (7) 7, 67, 1929.

2) S. Chandrasekhar, ZS. f. Astrophys. 3, 302, 1931.

Tabelle 17.

| Name des Sterns | $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (124'') | $\frac{L}{L_{\odot}}$ berechnet nach (131'') | $\frac{L}{L_{\odot}}$ beobach- tet | Logarithmus des Verhältnisses des nach (131'') berech- neten Wertes zu dem beobachteten |
|--|--|--|--|---|
| O ₃ Eri B | 0,29367 | 0,0074111 | 0,0096 | 1,8876123 |
| Sirius B | 2,5402 | 0,011519 | 0,0037 | 0,4931975 |
| Der durchschnittliche Wert des erwähnten Logarithmus: | | | | 0,1904049 |

Das arithmetische Mittel aus den beiden Logarithmen entspricht der Zahl 1.5503, was besagt, daß die berechneten Werte durchschnittlich etwa 1,6 mal größer sind als die beobachteten. Es ist natürlich zu bedauern, daß bei d -Sternen ein sehr viel kleineres statistisches Vergleichsmaterial sich beibringen läßt als bei g -Sternen. Aber immerhin genügt schon dies kleine Material um zu ersehen, daß die Formel (131'') bei d -Zwergen Werte von der richtigen Größenordnung ergibt.

Wenn wir L und r_1 aus (131) und aus den selbstverständlichen Gleichungen

$$\frac{4}{3} \pi r_1^3 \bar{\varrho} = M$$

und

$$L = 4 \pi r_1^2 \sigma T_{eff}^4$$

eliminieren, so erhalten wir:

$$\bar{\varrho} = \frac{4 \cdot 10^{18} \sigma T_{eff}^4}{GM}, \quad (132)$$

oder:

$$\bar{\varrho} = \frac{4 \cdot 10^{18} \sigma T_{eff}^4}{GM} \cdot \frac{M_{\odot}}{1,985 \cdot 10^{33}} = \frac{\sigma T_{eff}^4}{4,9625 \cdot 10^{14} (M/M_{\odot}) G}. \quad (133)$$

Das Einsetzen der entsprechenden Zahlenwerte für σ und G ergibt:

$$\bar{\varrho} = \frac{(\text{Nr log } 12,2374971) T_{eff}^4}{M/M_{\odot}}, \quad (134)$$

oder abgerundet:

$$\bar{\varrho} = \frac{1,73 \cdot 10^{-12} T_{eff}^4}{M/M_{\odot}}. \quad (134')$$

Die Formel (134) gestattet uns, die durchschnittliche Dichte eines „normalen“ d -Zwerges aus seiner Masse und seiner effektiven Temperatur zu berechnen. Wenn man aber bedenkt, daß die Massen der weißen Zwerge sich nicht besonders stark von der Sonnenmasse unterscheiden, und wenn man sich mit ganz rohen Schätzungen begnügen will, so kann man in (134)

$$M/M_{\odot} \sim 1$$

setzen, und dies ergibt:

$$\bar{\varrho} \sim (\text{Nr} \log 12,2374971) T_{eff}^4, \quad (135)$$

oder abgerundet:

$$\bar{\varrho} \sim 1,73 \cdot 10^{-12} T_{eff}^4. \quad (135')$$

Natürlich kann man mit (135) nicht den genauen Wert von $\bar{\varrho}$ berechnen, sondern nur seine Größenordnung. Auch soll noch einmal daran erinnert werden, daß die Formeln (134) und (135) ausschließlich bei d -Zwergen angewandt werden dürfen, und ja nicht bei g -Zwergen!

Die Formeln (134) und (135) zeigen, daß die durchschnittliche Dichte eines d -Zwerges sehr schnell mit der effektiven Temperatur steigt.

Nach einer neuen Untersuchung von Kuiper ist A.C. + 70° 8247 der dichteste aller bekannten weißen Zwerge¹⁾. Die effektive Temperatur schätzt Kuiper auf 28000°. Die Masse läßt sich leider nicht bestimmen, doch glaubt Kuiper sie auf indirektem Wege auf Grund von Chandrasekhars Theorie berechnen zu können. Auf diese Weise findet er $M = 2,8 M_{\odot}$, was für die durchschnittliche Dichte den enormen Wert $\bar{\varrho} = 3,6 \cdot 10^7 \text{ g.cm}^{-3}$ ergibt. Wir können jedoch hinsichtlich dieser Massenbestimmung Kuiper nicht folgen, weil Chandrasekhars Theorie, auf die er sich beruft, einen ganz anderen Sternaufbau voraussetzt, als wir angenommen haben. Aber Kuipers Bestimmung der effektiven Temperatur dürfte wohl richtig sein, und (135) ergibt für diesen Fall:

$$\bar{\varrho} \sim (\text{Nr} \log 12,2374931) \cdot 28000^4,$$

oder abgerundet:

$$\bar{\varrho} \sim 1,06 \cdot 10^6 \text{ g.cm}^{-3},$$

1) G. P. Kuiper, Publ. A. S. P. 47, 307, 1935.

wobei vorausgesetzt ist, daß die Masse sich nicht besonders stark von der Sonnenmasse unterscheidet.

Für einen d -Zwerg von der Masse $M = 0,5 M_{\odot}$ und von der effektiven Temperatur $T_{\text{eff}} = 2000^{\circ}$ würde (134') nur

$$\bar{\rho} = \frac{1,73 \cdot 10^{-12} \cdot 2000^4}{0,5} = 55,36 \text{ g.cm}^{-3}$$

ergeben. Eine solche Dichte unterscheidet sich nicht besonders stark von der Dichte gewöhnlicher roter Zwerge, und es taucht die Frage auf, ob nicht vielleicht unter letzteren auch rote d -Zwerge vorhanden seien. Die Feststellung davon stößt aber auf folgende Schwierigkeit: Wenn wir zu immer kleineren und kleineren Massen übergehen, so nimmt nach (131) bei d -Sternen die absolute bolometrische Helligkeit proportional $M^{1/3}$ ab, bei g -Sternen hingegen nach (124) proportional M^3 . Natürlich wird dadurch der Helligkeitsunterschied zwischen d - und g -Sternen immer geringer. Nun stellt aber (124) doch nur den durchschnittlichen „Normaltypus“ eines g -Sterns dar, von welchem die einzelnen g -Sterne bald nach der einen, bald nach der anderen Seite abweichen können. Die Tabelle 12 (auf S. 111) zeigt, daß diese individuellen Abweichungen vom „Normaltypus“ ziemlich groß sein können. Ähnliche individuelle Schwankungen wird man auch bei den d -Sternen zu erwarten haben, da ja (131) nur den „Normaltypus“ eines d -Sterns wiedergibt. Solange die „Normalhelligkeiten“ des g - und des d -Zustandes noch sehr verschieden sind, können sich die individuellen Abweichungen nicht überlagern, und es läßt sich daher bei jedem einzelnen Stern mit Sicherheit bestimmen, ob er zu der g - oder zu der d -Klasse gehört. Sind hingegen die „normalen“ absoluten bolometrischen Helligkeiten wenig verschieden, so können die individuellen Abweichungen sich teilweise überlagern, und es ist dann schwer zu entscheiden, zu welcher Klasse ein gegebener Stern zu rechnen ist. Deshalb ist es mir auch nicht gelungen, die Existenz roter d -Zwerge mit Sicherheit nachzuweisen.

Nach unserer Auffassung besteht zwischen g -Riesen und g -Zwergen kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer Unterschied. Ein wirklich tiefer qualitativer Unterschied besteht aber zwischen g -Sternen und d -Sternen. Die ersteren (gleichgültig ob Riesen oder Zwerge) gehorchen der Formel (124), die letzteren der Formel (131). Die traditionelle Einteilung der Sterne in Riesen

und Zwerge betrachten wir als eine Einteilung nach nebensächlichen Merkmalen. Wir wollen nicht leugnen, daß beim Übergang zu immer kleineren und kleineren Massen auch bei g -Zwergen wachsende Abweichung vom „Normaltypus“ der g -Sterne eintreten kann¹⁾, doch diese Abweichung ist von ganz anderer Größenordnung, als die Abweichungen zwischen den g - und d -Sternen.

Ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums.

Bei der Ableitung der Gleichung (128) hatten wir angenommen, daß das Universum seit 10^{17} Sekunden existiert. Verallgemeinern wir jetzt (128), indem wir annehmen, daß die Welt vor Θ Sekunden „erschaffen“ worden ist. Statt (128) erhalten wir nach derselben Methode die allgemeinere Gleichung

$$L = \frac{3^3 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{2^3 \cdot 5^5 h^5 \Theta^4 \Re} \left\{ \left[\frac{GM}{8\Re} \left(\frac{20 L \Theta}{3 G M^2} - \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}} \right)^4 + T_{eff}^4 \right] - T_{eff}^4 \right\}. \quad (136)$$

Um die „extreme“ g -Lösung der Gleichung (136) zu erhalten, muß $T_{eff} \sim 0$ angenommen werden, und dies ergibt:

$$L = \frac{3^3 \cdot 137^2 \pi^8 m_e^2 k^5 G^4 M^7}{2^3 \cdot 5^5 h^5 \Theta^4 \Re} \left\{ \left[\frac{GM}{8\Re} \left(\frac{20 L \Theta}{3 G M^2} \right) \right]^4 \right\} = \\ = \frac{137^2 \pi^8}{2^7 \cdot 15} \left(\frac{k}{h\Re} \right)^5 G^4 m_e^2 M^3,$$

was mit (124) identisch ist. Somit ist die „extreme“ g -Lösung der Gleichung (136) von der Zeitspanne Θ unabhängig (selbstverständlich nur solange die Kontraktion der inneren Neutronengaskugel genügend Energie liefert, um den von uns vorausgesetzten Bau des Sterns aufrechtzuerhalten).

Will man hingegen die „extreme“ d -Lösung der Gleichung (136) erhalten, so muß man in schon bekannter Weise

1) Erklärbar durch wachsende Unvollkommenheit der zentralen Neutronengaskugel.

$$\frac{20 \Theta}{3 G M^2} = \frac{\pi^{1/2} \sigma^{1/2} T_{eff}^2}{L^{3/2}}$$

setzen, und dies ergibt:

$$\Theta = \frac{3 (\pi \sigma)^{1/2} (M T_{eff})^2 G}{20 L^{3/2}} \quad (137)$$

Somit ist es möglich, das Alter eines d -Zwerges (aber keinesfalls eines g -Zwerges!) zu berechnen. Die d -Zwerge liefern uns also ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums. Führt man in (137) die entsprechenden Zahlenwerte ein, so erhält man:

$$\Theta = \frac{(\text{Nr} \log 10,1268675) \cdot (M T_{eff})^2}{L^{3/2}}, \quad (137')$$

oder abgerundet:

$$\Theta = \frac{1,34 \cdot 10^{-10} (M T_{eff})^2}{L^{3/2}}. \quad (137'')$$

Für Sirius B ist

$$\begin{aligned} L &= 0,0037 L_{\odot} = 0,0037 \cdot 3,780 \cdot 10^{33}, \\ M &= 0,934 M_{\odot} = 0,934 \cdot 1,985 \cdot 10^{33}, \\ \text{und } T_{eff} &= 7900^{\circ} \end{aligned}$$

zu setzen, und man erhält aus (137'):

$$\log \Theta = 17,7397963.$$

Für $O_2 \text{ Eri B}_2$ erhalten wir in analoger Weise:

$$\log \Theta = 16,8314186.$$

Das arithmetische Mittel beider Logarithmen ist

$$\log \Theta = 17,2856074,$$

was $\Theta = 1,9302 \cdot 10^{17}$ Sekunden entspricht, oder $6,12 \cdot 10^9$ Jahren.

Es ist sehr zu bedauern, daß unser statistisches Material hinsichtlich der d -Sterne so mangelhaft ist: sonst würde unser neues Prinzip es gestatten, das Alter des Universums mit viel größerer Genauigkeit zu berechnen. Aber auch so ist es schon klar, daß die Gleichung (137) für das Alter des Universums die richtige Größenordnung (vom Standpunkt der „kurzen Zeitskala“) ergibt. Man darf jedoch ja nicht vergessen, daß (137) nur für „normale“ d -Sterne gilt, keinesfalls aber für einen jeden individuellen d -Stern!

Die Erklärung von H. Vogt dafür, daß es keine Sterne von extrem großer Masse gibt. Kritik dieser Erklärung.

Nach der traditionellen Erklärung wird die Stabilität eines Sterns mit zunehmender Masse deshalb geringer, weil der Strahlungsdruck gegenüber dem Gasdruck eine immer mehr dominierende Rolle zu spielen beginnt. Vogt verwirft diese Erklärung und schlägt seine eigene Theorie vor¹⁾. Dabei stellt er u. a. folgende zwei Gleichungen auf:

$$\frac{1-\beta}{\beta^4} = \varphi(r) \cdot \frac{1}{(1+\xi)^4} \cdot M^2 m^4 \quad (138)$$

und

$$k \cdot Q = 4\pi c G (1-\beta) \left[1 + \psi(r) \frac{\beta}{4-3\beta} \right], \quad (139)$$

wo β das Verhältnis des Gasdruckes zum Gesamtdruck (also $1-\beta$ das Verhältnis des Strahlungsdruckes zum Gesamtdruck) bedeutet, M die Gesamtmasse des Sternes, m das mittlere effektive Molekulargewicht der Sternmaterie, Q die durchschnittlich pro Massen- und Zeiteinheit innerhalb der Kugel vom Radius r erzeugte Energiemenge, k den Massenabsorptionskoeffizienten, ξ eine variable Größe (die, je nachdem sich die Sternmaterie inkompressibler oder kompressibler als ein vollkommenes Gas verhält, positiv oder negativ ist), und endlich $\varphi(r)$ und $\psi(r)$ gewisse Funktionen des in Einheiten des Sternradius ausgedrückten Abstandes r vom Sternzentrum²⁾. Aus diesen Gleichungen glaubt nun Vogt den Schluß ziehen zu dürfen, daß kQ im Inneren der Sterne eines und desselben Aufbaus desto weniger variiert, je größer M ist. Mit anderen Worten: Um eine bestimmte Änderung des Sternaufbaus hervorzurufen, sei bei größeren Sternen eine geringere Änderung in der Verteilung der inneren Energiequellen notwendig als bei kleineren Sternen. Bei unendlich großer Sternmasse sei der Aufbau nur bei einer einzigen bestimmten Verteilung der Energiequellen möglich. Man müsse ja in diesem Falle $\beta = 0$ annehmen, und (139) ergibt dann tatsächlich $kQ = 4\pi c G$.

Ist kQ im allgemeineren Falle nicht konstant, sondern

1) H. Vogt, Veröffentlichungen der Universitäts-Sternwarte zu Jena Nr. 2, Jena 1929.

2) Ebenda, S. 3 f.

nimmt es nach dem Sternzentrum hin zu oder ab, so erreicht $1-\beta$ bereits für endliche Massenwerte entweder im Zentrum des Sternes oder in weniger tiefen Schichten den Wert 1. In letzterem Falle muß etwas höher, oder etwas niedriger der Wert von $1-\beta$ größer als 1 werden, was natürlich unmöglich ist. Im äußersten noch zulässigen Grenzfalle kann $1-\beta$ höchstens im Zentrum den Wert 1 annehmen, aber nicht in endlicher Entfernung vom Zentrum. Sonst müßte sich, nach Vogts Ansicht, vom Zentrum ausgehend eine Zone ausbilden, die nur strahlende Energie enthielte. Je größer die Sternmasse ist, desto größer müßte die erwähnte Zone sein, wodurch der Stern sich immer mehr jenem instabilen und daher unmöglichen Zustande näherte, bei welchem alle Materie in einer dünnen Kugelschale vereinigt wäre. Dadurch sei bewiesen, daß die Massen der Sterne nicht beliebig groß sein können.

Ich kann jedoch mit Vogt nicht einverstanden sein. Nehmen wir beispielsweise ein solches Sternmodell an, wo sämtliche Energiequellen nur außerhalb einer bestimmten Zone vom Radius r verteilt wären. Obgleich diese zentrale Zone völlig frei von Energiequellen ist, muß ihre Temperatur dennoch eine sehr hohe sein, weil glühende Gasmassen sie von allen Seiten umgeben. Somit kann in dieser inneren quellenlosen Zone $1-\beta$ unter Umständen sogar von 1 nur wenig verschieden sein. Für diese Zone haben wir $Q=0$ zu setzen und erhalten dann aus (139):

$$0 = 4\pi c G (1-\beta) \left[1 + \psi(r) \frac{\beta}{4-3\beta} \right],$$

und also:

$$1-\beta = 0;$$

d. h. in der zentralen Zone ist überhaupt kein Strahlungsdruck, also auch überhaupt keine strahlende Energie vorhanden. Ein solches Resultat ist offenbar absurd, weil ja die zentrale quellenfreie Zone von glühenden Gasmassen umgeben ist, also auf die Dauer nicht kalt bleiben kann. Aber gerade ein solcher extremer Fall trifft ein, wenn sich im Stern eine nur (oder fast nur) aus strahlender Energie bestehende Zone ausbildet. Wenn nun die Energiequelle der Sterne in irgendwelchen atomistischen Prozessen besteht (wie Vogt es doch offenbar annimmt), so muß ein von Materie freier Raum auch von Energiequellen

frei sein, und es muß dort $Q = 0$ gesetzt werden. Daraus folgt, daß sich Vogt auf die Gleichung (13'') gerade in einem solchen Falle beruft, wo diese Gleichung versagt!

Aber selbst wenn wir auch annehmen wollten, daß sich im Zentrum des Sternes eine von Materie freie Zone ausbildet, so ist dies noch lange kein Grund dafür, die Existenz eines solchen Sternes für unmöglich zu erklären. Sobald sich eine kleine aus reiner strahlender Energie bestehende „Blase“ ausbilden würde, müßte sie nach dem Archimedischen Gesetze nach oben steigen; an ihrer Stelle würde sich eine neue kleine „Blase“ ausbilden u. s. w. In einem solchen langsamen „Sieden“ würde doch nichts Katastrophales liegen, was etwa die Existenz des Sternes zur Unmöglichkeit machen könnte.

Ferner ist für Vogts Theorie sehr bedenklich, daß Möglichkeit oder Unmöglichkeit eines Sternes ausschließlich von der Verteilung der Energiequellen abhängen soll, nicht aber von ihren absoluten Größen (wenn nur letztere einen gewissen oberen Grenzwert nicht übersteigen). Nehmen wir z. B. an, daß ein sehr großer Stern (der also nur bei einer ganz bestimmten Energiequellenverteilung existieren konnte) bis 0° abs. abgekühlt ist, wobei natürlich alle seine früheren Energiequellen versiegt sind. Verteilen wir jetzt im Inneren dieses absolut kalten Sterns eine sehr kleine Menge irgendeines radioaktiven Stoffes, z. B. 1 Gramm Uran oder Thorium, so ungleichmäßig wie wir nur wollen. Wir erhalten dann einen Stern, der nach Vogts Theorie nicht existieren kann, weil die Energiequellen zu ungleichmäßig verteilt sind. Was wird aber jetzt mit diesem Stern geschehen? — Sich bis zur Unendlichkeit ausdehnen kann er nicht: seine einzige Energiequelle (ein Gramm Uran oder Thorium) wäre viel zu schwach, um die gewaltigen Gravitationskräfte zu überwinden. Nolens volens müßte dieser Stern ruhig existieren, obgleich dies nach Vogts Theorie unmöglich ist.

Auf Grund alles Gesagten glaube ich Vogts Theorie, trotz ihrer scheinbaren Plausibilität, ablehnen zu müssen.

Ich möchte aber eine andere Theorie vorschlagen, die ich an folgendem konkreten Beispiel erläutern will. Eine anfänglich unendlich ausgedehnte Neutronengaskugel von der Masse von 10^{39} Gramm habe sich im Verlaufe der Zeit zu einer Kugel vom Radius 10^{11} cm zusammengeballt. Der Einfachheit halber nehmen wir die Kugel als homogen an, und setzen die Masse

eines Neutrons gleich $1,66 \cdot 10^{-24}$ g. Die Gesamtzahl der Neutronen ist gleich $N = 10^{39} / 1,66 \cdot 10^{-24}$, und die in einem ccm enthaltene Zahl ist gleich $n = N / \frac{4}{3} \pi (10^{11})^3$. Der Strahlungsdruck ist gleich $\frac{1}{3} a T^4$ und der Gasdruck gleich nkT . Man kann annehmen, daß im Falle des Gleichgewichts die Summe des Strahlungsdrucks und des Gasdrucks gleich dem durchschnittlichen Gravitationsdruck sein muß, daß also die Gleichung

$$\frac{1}{3} a T^4 + nkT = \frac{3}{20 \pi} \cdot \frac{GM^2}{(10^{11})^4}$$

besteht. Die Einführung der Zahlenwerte (mit allen Dezimalstellen) ergibt:

$$(\text{Nr log } 15,4050445) T^4 + (\text{Nr log } 13,2948059) T = \text{Nr log } 25,5026764.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergibt:

$$T = \text{Nr log } 10,0236966.$$

Jetzt sind wir imstande sowohl die gesamte in der Kugel eingeschlossene strahlende Energie, als auch die gesamte kinetische Energie zu berechnen. Erstere ist gleich

$$\frac{1}{3} a T^4 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{11})^3 = 3,97229 \cdot 10^{59} \text{ Erg},$$

und letztere gleich

$$\frac{3}{2} kTN = 1,308 \cdot 10^{57} \text{ Erg}.$$

Die gesamte innere Energie der Kugel beträgt also

$$3,97229 \cdot 10^{59} + 1,308 \cdot 10^{57} = 3,98537 \cdot 10^{59} \text{ Erg}.$$

Die gesamte Kontraktionsenergie der Kugel ist gleich

$$\frac{3 \cdot G (10^{39})^2}{5 \cdot 10^{11}} = 3,99840 \cdot 10^{59} \text{ Erg}.$$

Somit ist die durch Ausstrahlung verlorengegangene Energiemenge gleich

$$3,99840 \cdot 10^{59} - 3,98537 \cdot 10^{59} = 1,303 \cdot 10^{57} \text{ Erg},$$

was nur etwa $\frac{1}{300}$ der inneren Energie ausmacht. Führt man diese ausgestrahlten $1,303 \cdot 10^{57}$ Erg in die Kugel zurück, so wird sie sich wieder bis zur Unendlichkeit ausdehnen. Wir haben

aber gesehen (s. oben S. 76), daß bei kleineren Sternmassen etwa die Hälfte der Gravitationsenergie ausgestrahlt wird. Will man einen solchen kleineren Stern sich wieder bis zur Unendlichkeit ausdehnen lassen, so muß man seine innere Energie verdoppeln, während bei unserem großen Sterne eine Erhöhung der inneren Energie um $\frac{1}{300}$ schon genügt. Dies zeigt, daß große Sterne gegen äußere Ursachen relativ weniger stabil sein müssen. Ihre Instabilität wird noch folgenden Umstand vergrößert. Wir hatten angenommen, daß die kinetische Energie eines Partikels gleich $\frac{3}{2} kT$ ist. Dies ist aber nur bei nichtrelativistischen „Molekulargeschwindigkeiten“ richtig. Bei extremen Temperaturen nähert sich die erwähnte Energie $3 kT$ (s. oben S. 90). Dadurch wird die innere Energie noch größer, also der Unterschied zwischen ihr und der gesamten Gravitationsenergie noch geringer.

Eigenschaften ultra-extrem großer Massen.

In Tabelle 15 haben wir die plausible Annahme gemacht, daß mit wachsender Masse sowohl die absolute als auch die relative Fähigkeit des Sternes sich auszudehnen ebenfalls wächst. Wenn so, so muß die Umhüllung immer durchsichtiger werden. Beim Pulsieren wird der Stern im Moment der maximalen Expansion am hellsten erscheinen, weil dann seine Umhüllung für die tieferen und heißeren Schichten am durchsichtigsten ist. In diesem Moment wirkt auch der selektive Strahlungsdruck auf die in der „umkehrenden“ Schicht des Sterns befindlichen Atome relativ (oder vielleicht sogar absolut) am stärksten¹⁾. Es ist daher nicht unmöglich, daß die maximale Helligkeit mit der maximalen Violettverschiebung der Spektrallinien zeitlich zusammenfällt.

1) Natürlich können die vom selektiven Strahlungsdruck getriebenen Atome in der umkehrenden Schicht es nicht zu so großen Geschwindigkeiten bringen, wie in der sehr viel weniger dichten Chromosphäre des Sterns. Einer Abnahme des Strahlungsdrucks wird in der umkehrenden Schicht (aber nicht in der Chromosphäre) sehr schnell eine Abnahme der erwähnten „Atomgeschwindigkeiten“ folgen, so daß die gegenseitige „Phasenverschiebung“ der beiden Erscheinungen keine große sein wird. Es ist klar, daß diese „Phasenverschiebung“ mit Abnahme der Gasdichte zunehmen muß.

Statt des Pulsierens kann man sich auch eine einmalige außerordentliche Ausdehnung der Umhüllung vorstellen, wobei ein kleiner Teil der letzteren sich im Raume sogar zerstreuen mag. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Temperatur an der Basis der Elektronen-Protonen-Umhüllung 10^9 Grad betrage; in größerer Entfernung hingegen (die wir durch x bezeichnen wollen) soll die Temperatur proportional der sich außerhalb der Kugel vom Radius x befindlichen Masse sein. Zerstreut sich also z. B. 0,001 der Masse der Umhüllung im Raume, so werden dadurch Schichten mit einer Temperatur von einer Million Grad bloßgelegt. Dies muß eine vorübergehende außerordentlich starke Helligkeitszunahme verursachen. Im Endstadium wird aber die absolute bolometrische Helligkeit von der ursprünglichen kaum zu unterscheiden sein, weil ja nur 0,001 der Umhüllung verlorengegangen ist. Dieser gewesene Teil der Umhüllung wird uns als Nebel erscheinen, der den Stern umgibt.

Aber auch ohne eine solche Katastrophe muß bei immer weiter wachsender Masse die Ausdehnung schließlich so groß werden, daß die Elektronen-Protonen-Hülle an den Rändern durchsichtig zu werden beginnt. Dem Beobachter wird scheinen, daß ein zentraler undurchsichtiger Kern von einer Nebelhülle umringt ist. Da wir jetzt viel tiefer in das Innere des Sterns hineinsehen können, so wird uns natürlich auch eine sehr viel höhere effektive Temperatur vorgetäuscht werden. Das Spektrum der Umhüllung muß in der Hauptsache, wegen der freien Elektronen, ein kontinuierliches sein, wobei aber wegen der beigemischten „gewöhnlichen“ Gase auch Emissionslinien auftreten können. Geht man zu noch größeren Massen über, so wird schließlich der ganze Stern durchsichtig. In einem solchen Falle kann sich aber natürlich gar keine strahlende Energie im Inneren des Sternes ansammeln; auch wird sich keine innere Neutronengaskugel ausbilden. Wenn z. B. die Masse des Sterns gleich 10^{50} g ist, so kann er sich nach Tabelle 1 (s. oben S. 30) auf Grund von Pokrowskis Theorie bis höchstens $1,74 \cdot 10^{-17}$ g.cm⁻³ verdichten. Die durchschnittliche „Molekulargeschwindigkeit“ in einem solchen ultra-extrem großen Stern nähert sich der Lichtgeschwindigkeit, was einer kolossal hohen Temperatur entspricht. Trotzdem wäre diese ungeheure

Temperatur viel harmloser, als die unvergleichlich niedrigere Temperatur in kleineren, aber dichteren Sternen. In einem Stern von 10^{50} g kann sich nämlich keine strahlende Energie aufspeichern, die der kolossalen Temperatur „entsprechen“ würde.

Was noch das starke Aufleuchten eines Stern anbetrifft, so kann die dazu notwendige große Expansion der Elektronen-Protonen-Hülle vielleicht nur das erste und stärkste Glied einer abklingenden Reihe von Pulsationsschwingungen darstellen. Dabei muß selbstverständlich das Maximum der effektiven Temperatur mit dem Helligkeitsmaximum zeitlich zusammenfallen, weil ja dann, nach unserer Auffassung, die Elektronen-Protonen-Hülle für ihre tiefsten und heißesten Schichten am durchsichtigsten ist.

Die beim Aufleuchten des Sterns entstandene Nebelschicht muß sich, wegen des erhaltenen Impulses, mit der Zeit immer mehr und mehr ausdehnen. Dagegen liegt für eine solche progressive Ausdehnung des oben beschriebenen (bloß scheinbaren) Nebels, der die Sterne von übergroßer Masse umgibt, kein Grund vor.

Zum Schluß will ich noch erwähnen, daß die letzten Jahrgänge von Proc. Nat. Acad. of Sciences (Washington) mir unzugänglich geblieben sind, weil seit dem Jahre 1933 die Zusendung dieser Zeitschrift an unsere Universitätsbibliothek (im Tauschverkehr) ohne jede Motivierung abgebrochen worden ist. Eine zweimalige Anfrage seitens der Universitätsbibliothek blieb unbeantwortet.

Inhaltsverzeichnis.

I. Teil. Die prinzipielle Seite der vorliegenden Frage.

| | Seite |
|---|-------|
| Literatur über die vorliegende Frage. | 3 |
| Kritik der in der Literatur geäußerten Ansichten. | 11 |
| Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der speziellen Relativitätstheorie? | 17 |
| J. von Neumanns Ansicht, daß $p = \frac{1}{3}\rho c^2$ die extremste Zustandsgleichung einer jeden Materie ist. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Ansicht. | 24 |
| Ist die Existenz einer oberen Grenzdichte möglich vom Standpunkt der allgemeinen Relativitätstheorie? — Untersuchungen von K. Schwarzschild und N. R. Sen. | 26 |
| Elementare Behandlungsmethoden von G. I. Pokrowski, von A. Haas und von mir. | 28 |
| Die Welt von J. Nuut. | 35 |
| Die Theorie von J. Nuut und die Expansionsformel von Einstein und W. de Sitter. | 35 |
| Die Theorie von J. Nuut und die obere Grenze der Dichte. | 37 |

II. Teil. Über die im Weltall tatsächlich vorkommenden maximalen Dichten und Temperaturen.

| | |
|--|----|
| Eine mathematisch bedenkliche Methode von E. C. Stoner zur Berechnung der maximalen Temperaturen. | 40 |
| Prioritätsfrage hinsichtlich der zum ersten Mal explicite aufgestellten relativistischen Entartungsformel. Eddingtons Angriff gegen diese Formel. Zurückweisung seines Angriffs. | 41 |
| Und trotzdem hat Eddington in einem gewissen Sinne recht! | 49 |
| E. A. Milne's Ansicht über das „Massen-Helligkeitsgesetz“. Kritik dieser Ansicht | 63 |
| Moderne Ansichten über den Bau der Atomkerne. | 64 |
| Über die Möglichkeit einer „mechanischen“ Dissoziation der Atomkerne im Inneren der Sterne. | 70 |
| Das neue Sternmodell. | 72 |
| Die Kontraktionsenergie bei dem neuen Sternmodell | 75 |
| G. Watagin's Formel: $n_+ = n_- \sim \frac{16\pi}{h^3 c^3} (kT)^3$ für die „Paarbildung“ bei extremer Temperatur. Prioritätsanspruch hinsichtlich dieser Formel (aber nicht hinsichtlich ihrer Ableitung). | 85 |

| | Seite |
|---|-------|
| Der durchschnittliche Massenabsorptionskoeffizient des neuen Sternmodells. . | 93 |
| Die neue Massen-Helligkeits-Formel in erster Annäherung. Vergleich der berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beob- achteten. | 102 |
| Die neue Massen-Helligkeits-Formel in zweiter Annäherung. Das „Russell- Diagramm“. | 114 |
| Massen-Helligkeits-Formel (in erster Annäherung) für weiße Zwerge. Ver- gleich der nach dieser Formel berechneten absoluten bolometrischen Helligkeiten mit den beobachteten. | 122 |
| Ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums. | 128 |
| Die Erklärung von H. Vogt dafür, daß es keine Sterne von extrem großer Masse gibt. Kritik dieser Erklärung. | 130 |
| Eigenschaften ultra-extrem großer Massen. | 134 |

Zusammenfassung und ergänzende Bemerkungen.

1) Sämtliche in der Literatur angeführten Beweise der Existenz einer oberen Grenzdichte halten einer eingehenden Kritik nicht stand.

2) Die Richtigkeit von Seitarô Suzuki's Ansicht, daß die Existenz einer oberen Grenzdichte mit der (speziellen) Relativitätstheorie unvereinbar ist, wird bestätigt. Dagegen werden die von Suzuki zur „Rettung“ der oberen Grenzdichte geforderten „kleinen“ Abänderungen der (speziellen) Relativitätstheorie abgelehnt.

3) Die Zustandsgleichung eines jeden Körpers muß der Bedingung $p \leq \rho c^2$ genügen, und diejenige eines isotropen Körpers der Bedingung $p \leq \frac{\rho c^2}{3}$.

4) Trotzdem ist anzunehmen, daß bei einem Himmelskörper die Dichte nicht unbegrenzt steigen kann. Die entsprechende „obere Grenzdichte“ ist aber umgekehrt proportional dem Quadrate der Masse, hat also mit der Kompressibilität der Materie nichts zu tun.

5) Der Verfasser erhebt den Anspruch der erste gewesen zu sein, der die relativistische Entartungsformel explicite aufgestellt hat (wenn auch mit einem falschen Koeffizienten). Eddingtons Angriff gegen diese Formel wird zurückgewiesen, wobei gezeigt wird, daß die relativistische Gleichung $p = K \rho c^2$ durchaus nicht als etwas für die Fermi-Statistik Spezifisches betrachtet werden darf. Trotzdem wird Eddington in gewisser Hinsicht recht gegeben.

6) Bei einer hohen Dichtekonzentration (die von Milne's Theorie verlangt wird) muß mit der Möglichkeit einer Atomkernzertrümmerung im Inneren der Sterne gerechnet werden. In einem solchen Falle entsteht ein Gemisch von Elektronen, Protonen und Neutronen, wobei letztere zum Sternzentrum hinabsinken (ein solcher Entmischungsprozeß geht bei Neutronen relativ sehr schnell vor sich: es genügen einige Millionen Jahre). Die Dichte in der so entstandenen inneren Neutronengaskugel kann so hohe Werte annehmen, wie dies bei keinem anderen Gase denkbar wäre.

7) Es wird ein neues Sternmodell aufgestellt, bei dem die Neutronenentmischung die Hauptrolle spielt. Die Kontraktionsenergie des neuen Sternmodells erweist sich als so groß, daß es überflüssig erscheint nach anderen Energiequellen zu suchen.

8) Das neue Sternmodell gestattet uns eine Massen-Helligkeits-Formel aufzustellen, nach der die absolute bolometrische

Helligkeit als proportional dem Kubus der Masse sich erweist. Auch der Koeffizient läßt sich rein theoretisch berechnen.

9) Bei helleren Sternen stimmt unsere neue Massen-Helligkeits-Formel mit der Beobachtung gut überein. Bei dunkleren Sternen ist die Übereinstimmung schlechter.

10) In 2. Annäherung ist die absolute bolometrische Helligkeit nicht nur von der Masse, sondern auch von der effektiven Temperatur abhängig. Sind Masse und effektive Temperatur gegeben, so erhält man für die absolute bolometrische Helligkeit nicht eine, sondern zwei Lösungen. Die eine (die g -Lösung) entspricht den Riesen und den gewöhnlichen Zwergen, die andere (die d -Lösung) nur den weißen Zwergen. Nach dieser Auffassung besteht zwischen Riesen und gewöhnlichen Zwergen kein qualitativer, sondern nur ein quantitativer Unterschied (verursacht durch die Verschiedenheit der Massen). Ein tiefer qualitativer (und nicht durch Verschiedenheit der Massen hervorgerufener) Unterschied besteht aber zwischen g - und d -Sternen.

11) Es wird eine plausible Erklärung des „Russell-Diagramms“ vorgeschlagen und an einem (freilich willkürlich idealisierten) Zahlenbeispiel illustriert.

12) Es wird eine Massen-Helligkeits-Formel für d -Sterne (weiße Zwerge) aufgestellt, welche von der gewöhnlichen Massen-Helligkeits-Formel völlig verschieden ist.

13) Es wird eine Formel aufgestellt, wonach aus gegebener Masse, effektiver Temperatur und absoluter bolometrischer Helligkeit das Alter der d -Sterne (aber keinesfalls dasjenige der g -Sterne!) berechnet werden kann. Die erhaltenen Zahlen sind (der Größenordnung nach) mit der „kurzen Zeitskala“ im Einklang. Damit haben wir ein neues Prinzip zur Berechnung des Alters des Universums aufgestellt.

14) Es wird die Frage untersucht, weshalb es keine Sterne von extrem großer Masse gebe. Die scheinbar sehr plausible Erklärung von H. Vogt wird abgelehnt und diejenige von Eddington akzeptiert, freilich in neuer Formulierung.

15) Das starke Aufleuchten neuer Sterne wird dadurch erklärt, daß dank der Zerstreuung der äußersten Schichten die inneren, sehr viel heißeren, entblößt werden.

* * *

Als der Druck der vorliegenden Untersuchung schon abgeschlossen war, erhielt ich das Januarheft der M. N. mit einem Aufsatz von Milne, worin eine neue Massen-Helligkeits-Formel

$$L = M^3 \frac{8 \pi^2 c G^4 \left(\frac{1}{3} a \right)}{\bar{\kappa}_1 (\mathcal{R}/\mu)^4} (n+1)^{-3} \left(-\xi^2 \frac{d\Theta}{d\xi} \right)_1^{-2}$$

abgeleitet wird¹⁾. Diese Formel hat mit einer der meinigen große Ähnlichkeit. Ich habe nämlich auf S. 108 die Formel

$$L = \frac{64 \pi^2 a c r_0^4 (T_0^4 - T_{eff}^4)}{3 \bar{\kappa} M}$$

aufgestellt. Vernachlässigt man T_{eff}^4 neben T_0^4 , so erhält man auf Grund von (121):

$$L = \frac{64 \pi^2 a c r_0^4}{3 \bar{\kappa} M} \left(\frac{GM}{16 \Re r_0} \right)^4,$$

oder:

$$L = M^3 \frac{8 \pi^2 c G^4 \left(\frac{1}{3} a \right)}{\bar{\kappa} \left(\Re / \frac{1}{2} \right)^4} (3 + 1)^{-3} (V \sqrt{8})^{-2}.$$

Trotz der großen Ähnlichkeit zwischen Milne's Formel und der meinigen sind doch unser Gedankengang und unsere ganze Einstellung wesentlich verschieden. In meiner Theorie spielt die Entstehung einer Neutronengaskugel im Sternzentrum die Hauptrolle, während Milne die Möglichkeit einer Neutronenentmischung nicht in Betracht zieht. Außerdem betrachte ich die Kontraktionsenergie als einzige und völlig genügende Energiequelle der Sterne, während Milne hypothetische subatomare Prozesse als Energiequelle betrachtet.

Milne's letzterwähnte Ansicht führt zu Schwierigkeiten, die mir unüberwindlich scheinen. Wenn die Energiequelle der Sterne in subatomaren Prozessen zu suchen ist, warum ist sie proportional M^3 und nicht einfach proportional M ? — Milne sagt: „In the absence of such a knowledge [hinsichtlich der Energiequellen] there are two distinct methods of attempting to calculate, not the luminosity in terms of the mass, but the relation between mass, luminosity and effective temperature“²⁾. Dazu muß ich bemerken, daß Sterne von gleicher Masse, aber von verschiedener effektiver Temperatur im Durchschnitt beinahe gleiche absolute bolometrische Helligkeiten besitzen; letztere sind also von den effektiven Temperaturen beinahe unabhängig. Darum wird die „relation between mass, luminosity and effective temperature“ identisch sein mit der „relation between mass and luminosity“ (wenigstens in erster Annäherung).

Nehmen wir jetzt an, daß gewöhnliche radioaktive Prozesse die einzige Energiequelle seien. Es seien zwei Körper aus reinem Radium gegeben, deren Massen 5 kg und 50 kg be-

1) E. A. Milne, Monthly Not. R. A. S. **96**, 210, 1936.

2) Ebenda, S. 214.

tragen. Wir können die beliebigsten Annahmen hinsichtlich der effektiven Temperaturen und des inneren Aufbaus der beiden Körper machen: niemals wird der größere 10^3 mal, sondern immer nur 10 mal mehr ausstrahlen als der kleinere. Wie soll man dies aber mit Milne's M^3 -Formel in Einklang bringen, die ja unabhängig von der Art der Energieerzeugung gelten muß? ¹⁾. — Bei meiner Auffassung (vgl. S. 63 f.) treten solche Schwierigkeiten nicht auf.

Wir haben angenommen, daß im Inneren der Sterne die Atomkerne zertrümmert werden, und erst danach die Neutronenentmischung einsetzt. Es ist aber auch möglich, daß am „Anfang der Welt“ (vom Standpunkt der „kurzen“ Zeitskala) die Neutronen und Protonen noch gar nicht zu Atomkernen verbunden waren; dann könnte bei den Sternen eine Neutronenentmischung noch vor der Bildung von Atomkernen eingesetzt haben. Jedenfalls läßt sich eine solche Möglichkeit nicht ohne weiteres von der Hand weisen.

Beim Aufleuchten neuer Sterne wird auch das beinahe plötzliche Freiwerden der in dem sich zerstreuen Teile der Sternmaterie aufgespeicherten Energie eine Rolle spielen. In unserem Zahlenbeispiel (S. 135) ist die (anfängliche) durchschnittliche Temperatur des sich zerstreuen Teils der Sternmaterie gleich einer halben Million Grad. Setzt man seine Masse gleich $2 \cdot 10^{30}$ g (= 0,001 der Sonnenmasse) und die spezifische Wärmekapazität gleich 1 (was wegen des hohen Wasserstoffgehalts eher zu wenig als zu viel sein dürfte), so erhält man $2 \cdot 10^{30} \cdot 5 \cdot 10^5 \cdot 4,2 \cdot 10^7 = 4,2 \cdot 10^{43}$ Erg. (Eine solche Energiemenge strahlt unsere Sonne in etwa 350 Jahren aus!) Da die sich zerstreue Masse von $2 \cdot 10^{30}$ Gramm in kurzer Zeit sehr durchsichtig wird, so müssen die aufgespeicherten $4,2 \cdot 10^{43}$ Erg entsprechend schnell ausgestrahlt werden.

Zum Schluß mögen zwei Druckfehler berichtigt werden. In Gleichung (40) auf S. 35 ist beim Klammerausdruck der Exponent 2 ausgefallen. Auf S. 57, 5. Zeile von unten, muß $\frac{1}{3} qc^2$ statt qc^2 stehen.

¹⁾ Milne hat doch seine M^3 -Formel abgeleitet, ohne auf die physikalische Natur der Energieerzeugung einzugehen: folglich muß seine Formel unabhängig von letzterer gültig sein.

Elmiste köidete sisu. — Contenu des volumes précédents.

A I (1921). 1. A. Paldrock. Ein Beitrag zur Statistik der Geschlechtskrankheiten in Dorpat während der Jahre 1909—1918. — 2. K. Väisälä. Verallgemeinerung des Begriffes der Dirichletschen Reihen. — 3. C. Schlossmann. Hapete mõju kolloiidide peale ja selle tähtsus patoloogias. (L'action des acides sur les colloïdes et son rôle dans la pathologie.) — 4. K. Regel. Statistische und physiognomische Studien an Wiesen. Ein Beitrag zur Methodik der Wiesenuntersuchung. — 5. H. Reichenbach. Notes sur les microorganismes trouvés dans les pêches planctoniques des environs de Covda (gouv. d'Archangel) en été 1917. — **Misc.** F. Bucholtz. Der gegenwärtige Zustand des Botanischen Gartens zu Dorpat und Richtlinien für die Zukunft.

A II (1921). 1. H. Bekker. The Kuckers stage of the ordovician rocks of NE Estonia. — 2. C. Schlossmann. Über die Darmspirochäten beim Menschen. — 3. J. Letzmann. Die Höhe der Schneedecke im Ostbaltischen Gebiet. — 4. H. Kaho. Neutraalsoolade mõjust ultramaksimum-temperatuuri peale *Tradescantia zebrina* juures. (Über den Einfluss der Neutralsalze auf die Temperatur des Ultramaximums bei *Tradescantia zebrina*.)

A III (1922). 1. J. Narbutt. Von den Kurven für die freie und die innere Energie bei Schmelz- und Umwandlungsvorgängen. — 2. A. Томсонъ (A. Thomson). Значение аммонійныхъ солей для питания высшихъ культурныхъ растений. (Der Wert der Ammonsalze für die Ernährung der höheren Kulturpflanzen.) — 3. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. I. Hälfte (S. I—VII und 1—96). — 4. A. Lüüs. Ein Beitrag zum Studium der Wirkung künstlicher Wüldungen Helenenquellensalze auf die Diurese nierenkranker Kinder. — 5. E. Öpik. A statistical method of counting shooting stars and its application to the Perseid shower of 1920. — 6. P. N. Kogerman. The chemical composition of the Esthonian M.-Ordovician oil-bearing mineral „Kukersite“. — 7. M. Wittlich und S. Weshnjakow. Beitrag zur Kenntnis des estländischen Ölschiefers, genannt Kukersit. — **Misc.** J. Letzmann. Die Trombe von Odenpäh am 10. Mai 1920.

A IV (1922). 1. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. II. Hälfte (S. 97—188). — 2. A. Valdes. Glükogeeni hulka vähendavate tegurite mõju üle südame spetsiifilise lihassüsteemi glükogeeni peale. (Über den Einfluss der die Glykogenmenge vermindernenden Faktoren auf das Glykogen des spezifischen Muskelsystems des Herzens.) — 3. E. Öpik. Notes on stellae statistics and stellar evolution. — 4. H. Kaho. Raskemetallsoolade kihvtisusest taimeplasma kohta. (Über die Schwermetallgiftwirkung in bezug auf das Pflanzenplasma.) — 5. J. Piiper und M. Härms. Der Kiefernkreuzschnabel der Insel Ösel *Loxia pityopsittacus estiae* subsp. nov. — 6. L. Poska-Teiss. Zur Frage über die vielkernigen Zellen des einschichtigen Plattenepithels.

A V (1924). 1. E. Öpik. Photographic observations of the brightness of Neptune. Method and preliminary results. — 2. A. L ü ü s. Ergebnisse der Krüppelkinder-Statistik in Eesti. — 3. C. Schloßmann. Culture in vitro des protozoaires de l'intestin humain. — 4. H. Kaho. Über die physiologische Wirkung der Neutralsalze auf das Pflanzenplasma. — 5. Y. Kauko. Beiträge zur Kenntnis der Torfzersetzung und Vertorfung. — 6. A. Tamme kann. Eesti diktüoneema-kihi uurimine tema tekkimise, vana-duse ja levimise kohta. (Untersuchung des Dictyonema-Schiefers in Estland nach Entstehung, Alter und Verbreitung.) — 7. Y. Kauko. Zur Bestimmung des Vertorfungsgrades. — 8. N. Weiderpass. Eesti piparmündi-õli (*Oleum menthe esthicum*). (Das estnische Pfefferminzöl.)

A VI (1924). 1. H. Bekker. Mõned uued andmed Kukruse lademe stratigraafia ja faunast. (Stratigraphical and paleontological supplements on the Kukruse stage of the ordovician rocks of Eesti (Estonia).) — 2. J. Wilip. Experimentelle Studien über die Bestimmung von Isothermen und kritischen Konstanten. — 3. J. Letzmann. Das Bewegungsfeld im Fuss einer fortschreitenden Wind- oder Wasserhose. — 4. H. Scupin. Die Grundlagen paläogeographischer Karten. — 5. E. Öpik. Photometric measures on the moon and the earth-shine. — 6. Y. Kauko. Über die Vertorfungswärme. — 7. Y. Kauko. Eigentümlichkeiten der H_2O - und CO_2 -Gehalte bei der unvollständigen Verbrennung. — 8. M. Tilzen und Y. Kauko. Die wirtschaftlichen Möglichkeiten der Anwendung von Spiritus als Brennstoff. — 9. M. Wittlich. Beitrag zur Untersuchung des Öles aus estländischem Ölschiefer. — 10. J. Wilip. Emergenzwinkel, Unstetigkeitsflächen, Laufzeit. — 11. H. Scupin. Zur Petroleumfrage in den baltischen Ländern. — 12. H. Richter. Zwei Grundgesetze (Funktion- und Strukturprinzip) der lebendigen Masse.

A VII (1925). 1. J. Vilms. Kõhreglükogeeni püsivusest mõne-suguste glükogeeni vähendavate tegurite puhul. (Über die Stabilität des Knorpelglykogens unter verschiedenen das Glykogen zum Verschwinden bringenden Umständen.) — 2. E. Blessig. Ophthalmologische Bibliographie Russlands 1870—1920. Nachtrag. — 3. O. Kuriks. Trachoma Eestis (eriti Tartus) möödnud ajal ja praegu. (Das Trachom in Estland (insbesondere in Dorpat) einst und jetzt.) — 4. A. Brandt. Sexualität. Eine biologische Studie. — 5. M. Haltenberger. Gehört das Baltikum zu Ost-, Nord- oder zu Mitteleuropa? — 6. M. Haltenberger. Recent geographical work in Estonia.

A VIII (1925). 1. H. Jaakson. Sur certains types de systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. Sur l'interpolation. — 2. K. Frisch. Die Temperaturabweichungen in Tartu (Dorpat) und ihre Bedeutung für die Witterungsprognose. — 3. O. Kuriks. Muutused leeprahaigete silmas Eesti leprosooriumide haigete läbivaatamise põhjal. (Die Lepra des Auges.) — 4. A. Paldrock. Die Senkungsreaktion und ihr praktischer Wert. — 5. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse- (C_2) -Stufe in Eesti. I. — 6. M. Wittlich. Einiges über den Schwefel im estländischen Ölschiefer (Kukersit)

und dessen Verschmelzungsprodukten. — 7. H. Kaho. Orientierende Versuche über die stimulierende Wirkung einiger Salze auf das Wachstum der Getreidepflanzen. I.

A IX (1926). 1. E. Krahn. Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen. — 2. A. Mieler. Ein Beitrag zur Frage des Vorrückens des Peipus an der Embachmündung und auf der Peipusinsel Pirisaar in dem Zeitraum von 1682 bis 1900. — 3. M. Haltenberger. Der wirtschaftsgeographische Charakter der Städte der Republik Eesti. — 4. J. Rumma. Die Heimatforschung in Eesti. — 5. M. Haltenberger. Der Stand des Aufnahme- und Kartenwesens in Eesti. — 6. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. I. — 7. A. Tammekann. Die Oberflächengestaltung des nord-ostestländischen Küstentafellandes. — 8. K. Frisch. Ein Versuch das Embachhochwasser im Frühling für Tartu (Dorpat) vorherzubestimmen.

A X (1926). 1. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. II—III. — 2. H. Scupin. Alter und Herkunft der ostbaltischen Solquellen und ihre Bedeutung für die Frage nach dem Vorkommen von Steinsalz im baltischen Obersilur. — 3. Th. Lippmaa. Floristische Notizen aus dem Nord-Altai nebst Beschreibung einer neuen *Cardamine*-Art aus der Sektion *Dentaria*. — 4. Th. Lippmaa. Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta. I. Allgemeiner Teil. — 5. E. Pipenberg. Eine städtemorphographische Skizze der estländischen Hafenstadt Pärnu (Pernau). — 6. E. Spohr. Über das Vorkommen von *Sium erectum* Huds. und *Lemna gibba* L. in Estland und über deren nordöstliche Verbreitungsgrenzen in Europa. — 7. J. Wilip. On new precision-seismographs.

A XI (1927). 1. Th. Lippmaa. Pigmenttypen bei Pteridophyta und Anthophyta. II. Spezieller Teil. — 2. M. Haltenberger. Landeskunde von Eesti. IV—V. — 3. H. Scupin. Epirogenese und Orogenese im Ostbaltikum. — 4. K. Schlossmann. Mikroorganismide kui bioloogiliste reaktiivide tähtsusest keemias. (Le rôle des ferments microbiens dans la chimie.) — 5. J. Sarv. Ahmese geomeetriselised joonised. (Die geometrischen Figuren des Ahmes.) — 6. K. Jaanson-Orviku. Beiträge zur Kenntnis der Aseri- und der Tallinna-Stufe in Eesti. I.

A XII (1927). 1. E. Reinwaldt. Beiträge zur Muriden-Fauna Estlands mit Berücksichtigung der Nachbargebiete. — 2. A. Öpik. Die Inseln Odensholm und Rogö. Ein Beitrag zur Geologie von NW-Estland. — 3. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂)-Stufe in Eesti. II. — 4. Th. Lippmaa. Beobachtungen über durch Pilzinfektion verursachte Anthocyaninbildung. — 5. A. Laur. Die Titration des Ammoniumhydrosulfides mit Ferricyankalium. — 6. N. King. Über die rhythmischen Niederschläge von PbJ₂, Ag₂CrO₄ und AgCl im kapillaren Raume. — 7. P. N. Kogerman and J. Kranig. Physical constants of some alkyl carbonates. — 8. E. Spohr. Über brunsterzeugende Stoffe im Pflanzenreich. Vorläufige Mitteilung.

A XIII (1928). 1. J. Sarv. Zum Beweis des Vierfarbensatzes. — 2. H. Scupin. Die stratigraphische Stellung der Devonschichten im Südosten Estlands. — 3. H. Perlitz. On the parallelism between

the rate of change in electric resistance at fusion and the degree of closeness of packing of mealltic atoms in crystals. — 4. K. Frisch. Zur Frage der Luftdruckperioden. — 5. J. Port. Untersuchungen über die Plasmakoagulation von *Paramaecium caudatum*. — 6. J. Sarw. Direkte Herleitung der Lichtgeschwindigkeitsformeln. — 7. K. Frisch. Zur Frage des Temperaturanstiegens im Winter. — 8. E. Spöhr. Über die Verbreitung einiger bemerkenswerter und schutzbedürftiger Pflanzen im Ostbaltischen Gebiet. — 9. N. Rägo. Beiträge zur Kenntnis des estländischen Dictyonemaschiefers. — 10. C. Schlossmann. Études sur le rôle de la barrière hémato-encéphalique dans la genèse et le traitement des maladies infectieuses. — 11. A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukuruse-(C₂-C₃-)Stufe in Eesti. III.

A XIV (1929). 1. J. Rives. Über die histopathologischen Veränderungen im Zentralnervensystem bei experimenteller Nebenniereninsuffizienz. — 2. W. Wadi. Kopsutuberkuloosi areng ja kliinilised vormid. (Der Entwicklungsgang und die klinischen Formen der Lungentuberkulose.) — 3. E. Markus. Die Grenzverschiebung des Waldes und des Moores in Alatskivi. — 4. K. Frisch. Zur Frage über die Beziehung zwischen der Getreideernte und einigen meteorologischen Faktoren in Eesti.

A XV (1929). 1. A. Nõmmik. The influence of ground limestone on acid soils and on the availability of nitrogen from several mineral nitrogenous fertilizers. — 2. A. Öpik. Studien über das estnische Unterkambrium (Estonium). I—IV. — 3. J. Nuut. Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe. — 4. J. Nuut. Über die Vierfarbenformel. — 5. J. Nuut. Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs. — 6. Th. Lippmaa. Pflanzenökologische Untersuchungen aus Norwegisch- und Finnisch-Lappland unter besonderer Berücksichtigung der Lichtfrage.

A XVI (1930). 1. A. Paris. Über die Hydratation der Terpene des Terpentins zu Terpinhydrat durch Einwirkung von Mineralsäuren. — 2. A. Laur. Die Anwendung der Umschlagselektroden bei der potentiometrischen Massanalyse. Die potentiometrische Bestimmung des Kaliums. — 3. A. Paris. Zur Theorie der Strömungsdoppelbrechung. — 4. O. Kuriks. Pisarate toimest silma mikrofloorasse. (Über die Wirkung der Tränen auf die Mikroflora des Auges.) — 5. K. Orviku. Keskdevoni põhikihid Eestis. (Die untersten Schichten des Mitteldevons in Eesti.) — 6. J. Kopwille. Über die thermale Zersetzung von estländischem Ölschiefer Kukersit.

A XVII (1930). 1. A. Öpik. Brachiopoda Protremata der estländischen ordovizischen Kukuruse-Stufe. — 2. P. W. Thomson. Die regionale Entwicklungsgeschichte der Wälder Estlands.

A XVIII (1930). 1. G. Vilberg. Erneuerung der Loodvegetation durch Keimlinge in Ost-Harrien (Estland). — 2. A. Parts. Über die Neutralsalzwirkung auf die Geschwindigkeit der Ionenreaktionen. — 3. Ch. R. Schlossmann. On two strains of yeast-like organisms cultured from diseased human throats. — 4. H. Richter. Die Relation zwischen Form und Funktion und das teleologische Prinzip in den Naturphänomenen. — 5. H. Arro. Die Metalloxyde als photo-

chemische Sensibilatoren beim Bleichen von Methylenblaulösung. — **6.** A. Luha. Über Ergebnisse stratigraphischer Untersuchungen im Gebiete der Saaremaa-(Ösel-)Schichten in Eesti (Unterösel und Eurypterusschichten). — **7.** K. Frisch. Zur Frage der Zyklonenvertiefung. — **8.** E. Markus. Naturkomplexe von Alatskivi.

A XIX (1931). **1.** J. Uudelt. Über das Blutbild Trachomkranker. — **2.** A. Öpik. Beiträge zur Kenntnis der Kukruse-(C₂-C₃-)Stufe in Eesti. IV. — **3.** H. Liedemann. Über die Sonnenscheindauer und Bewölkung in Eesti. — **4.** J. Sarw. Geomeetria alused. (Die Grundlagen der Geometrie.)

A XX (1931). **1.** J. Kuusk. Glühaufschliessung der Phosphorite mit Kieselsäure zwecks Gewinnung eines citrallöslichen Düngmittels. — **2.** U. Karell. Zur Behandlung und Prognose der Luxationsbrüche des Hüftgelenks. — **3.** A. Laur. Beiträge zur Kenntnis der Reaktion des Zinks mit Kaliumferrocyanid. I. — **4.** J. Kuusk. Beitrag zur Kalisalzgewinnung beim Zementbrennen mit besonderer Berücksichtigung der estländischen K-Mineralien. — **5.** L. Rinne. Über die Tiefe der Eisbildung und das Auftauen des Eises im Niederungsmoor. — **6.** J. Wilip. A galvanometrically registering vertical seismograph with temperature compensation. — **7.** J. Nuut. Eine arithmetische Analyse des Vierfarbenproblems. — **8.** G. Barkan. Dorpats Bedeutung für die Pharmakologie. — **9.** K. Schlossmann. Vanaduse ja surma mõistetest ajakohaste bioloogiliste andmete alusel. (Über die Begriffe Alter und Tod auf Grund der modernen biologischen Forschung.)

A XXI (1931). **1.** N. Kwaschnin-Ssamarin. Studien über die Herkunft des osteuropäischen Pferdes. — **2.** U. Karell. Beitrag zur Ätiologie der arteriellen Thrombosen. — **3.** E. Krahn. Über Eigenschwingungszahlen freier Platten. — **4.** A. Öpik. Über einige Karbonatgesteine im Glazialgeschiebe NW-Estlands. — **5.** A. Thomson. Wasserkulturversuche mit organischen Stickstoffverbindungen, angestellt zur Ermittlung der Assimilation ihres Stickstoffs von seiten der höheren grünen Pflanze.

A XXII (1932). **1.** U. Karell. An observation on a peculiarity of the cardiac opening reflex in operated cases of cardiospasmus. — **2.** E. Krahn. Die Wahrscheinlichkeit der Richtigkeit des Vierfarbensatzes. — **3.** A. Audova. Der wirkliche Kampf ums Dasein. — **4.** H. Perlitz. Abstandsänderungen nächster Nachbaratome in einigen Elementen und Legierungen bei Umordnung aus der kubischen flächenzentrierten Anordnung in die kubische raumzentrierte oder die hexagonale dichteste Anordnung.

A XXIII (1932). **1.** J. Port. Untersuchungen über die Wirkung der Neutralsalze auf das Keimlingswachstum bezüglich der Abhängigkeit von ihrer Konzentration. — **2.** E. Markus. Chorogenese und Grenzverschiebung. — **3.** A. Öpik. Über die Plectellinen. — **4.** J. Nuut. Einige Bemerkungen über Vierpunktaxiome. — **5.** K. Frisch. Die Veränderungen der klimatischen Elemente nach den meteorologischen Beobachtungen von Tartu 1866—1930.

A XXIV (1933). **1.** M. Gross. In der Butter vorkommende Sprosspilze und deren Einwirkung auf die Butter. — **2.** H. Perlitz. Bemerkungen zu den Regeln über Valenzelektronenkonzentrationen in

binären intermetallischen Legierungen. — **3.** A. Öpik. Über *Scolithus* aus Estland. — **4.** T. Lippmaa. Aperçu général sur la végétation autochtone du Lautaret (Hautes-Alpes). — **5.** E. Markus. Die süd-östliche Moorbucht von Lauge. — **6.** A. Sprantsman. Über Herstellung makroskopischer Thalliumkristalle durch Elektrolyse. — **7.** A. Öpik. Über Plectamboniten.

A XXV (1933). **1.** A. Öpik. Über einige Dalmanellacea aus Estland. — **2.** H. Richter. Ergänzungen zu: „Die Relation zwischen Form und Funktion und das teleologische Prinzip in den Naturphänomenen“. Die Rolle, welche „Spirale“ und „Wirbel“ in den biologischen Phänomenen spielt, besonders auch in bezug auf die feinere Struktur des lebendigen Protoplasmas. — **3.** T. Lippmaa ja K. Eichwald. Eesti taimed I (1—50). (Estonian plants.) — **4.** E. Piipenberg. Die Stadt Stadt Petseri in Estland. — **5.** A. Miljan. Vegetationsuntersuchungen an Naturwiesen und Seen im Otepääschen Moränengebiet Estlands. I. — **6.** R. Livländer. On the colour of Mars. — **7.** A. Tudeberg. Über die Theorie und die Anwendungsmethoden der Quadraturreihen.

A XXVI (1934). **1.** E. Blessig. Index ophthalmologiae Balticus. — **2.** E. Öpik. Atomic collisions and radiation of meteors. — **3.** J. Tehver und A. Kriisa. Zur Histologie des Harnleiters der Haussäugetiere. — **4.** H. Kaho. Leelissoolade toimest taimeraku deplasmolüüsile. (Über den Einfluss von Alkalisalzen auf die Deplasmolyse der Pflanzenzellen.) — **5.** A. Öpik. Über Klitamboniten. — **6.** A. Tudeberg. Über die Beweisbarkeit einiger Anordnungsansagen in geometrischen Axiomensystemen.

A XXVII (1934). **1.** K. Lellep. Simulation von Geisteskrankheiten und deren Grenzzuständen. — **2.** M. Tiitso. Hingamise ergulisest regulatsioonist. I teadaanne: Stenoosi toime inimese hingamisele. (Über die nervöse Atemregulation. I. Mitteilung: Der Einfluss der Stenose auf die menschliche Atmung.) — **3.** M. Tiitso. Hingamise ergulisest regulatsioonist. II teadaanne: Inimese hingamisfrekvents kopsude erineva täitumise korral. (Über die nervöse Atemregulation. II. Mitteilung: Die Atemfrequenz des Menschen bei abnormen Lungenfüllungen.) — **4.** M. Tiitso. Hingamise ergulisest regulatsioonist. III teadaanne: Proprioseptiivsete aferentside toimest hingamisele. (Über die nervöse Atemregulation. III. Mitteilung: Über die Auswirkung der propriozeptiven Afferenzen auf die Atmung.) — **5.** J. Tehver und M. Keerd. The number of ribs in the ox and pig. — **6.** A. Kärnsa. Über das Problem der Vorhersage des nächtlichen Temperaturminimums. — **7.** K. Schlossmann. A study of bacterial carbohydrates with special reference to the tubercle bacillus. — **8.** A. Öpik. *Ristnacrinus*, a new ordovician crinoid from Estonia. — **9.** A. Kipper. Variation of surface gravity upon two Cepheids — δ Cephei and η Aquilae. — **10.** E. Lepik. Fungi Estonici exsiccati. Uredinaceae. — **11.** H. Perltz. The structure of the intermetallic compound Au_2Pb .

A XXVIII (1935). **1.** T. Lippmaa. Une analyse des forêts de l'île estonienne d'Abruksa (Abro) sur la base des associations unistrates.

— 2. J. Sarv. Foundations of arithmetic. — 3. A. Tudeberg. Orthogonalsysteme von Polynomen und Extremumprobleme der Interpolationsrechnung. — 4. T. Lippmaa. Eesti geobotaanika põhijooni. (Aperçu géobotanique de l'Estonie.)

B I (1921). 1. M. Vasmer. Studien zur albanesischen Wortforschung. I. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 1. — 3. M. Vasmer. Osteuropäische Ortsnamen. — 4. W. Anderson. Der Schwank von Kaiser und Abt bei den Minsker Juden. — 5. J. Bergman. Quaestiunculae Horatianae.

B II (1922). 1. J. Bergman. Aurelius Prudentius Clemens, der grösste christliche Dichter des Altertums. I. — 2. L. Kettunen. Lõunavepsa häälik-ajalugu. I. Konsonandid. (Südwepsische Lautgeschichte. I. Konsonantismus.) — 3. W. Wiget. Altgermanische Lautuntersuchungen.

B III (1922). 1. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 2. — 2. M. A. Курчинский (M. A. Kurtschinsky). Социальный законъ, случай и свобода. (Das soziale Gesetz, Zufall und Freiheit.) — 3. A. R. Cederberg. Die Erstlinge der estländischen Zeitungsliteratur. — 4. L. Kettunen. Lõunavepsa häälik-ajalugu. II. Vokaalid. (Südwepsische Lautgeschichte. II. Vokalismus.) — 5. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. [I.] — 6. A. M. Tallgren. Zur Archäologie Fests. I.

B IV (1923). 1. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. II. — 2. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 3. — 3. W. Anderson. Nordasiatische Flutsagen. — 4. A. M. Tallgren. L'ethnographie préhistorique de la Russie du nord et des États Baltiques du nord. — 5. R. Gutmann. Eine unklare Stelle in der Oxfordter Handschrift des Rolandsliedes.

B V (1924). 1. H. Mutschmann. Milton's eyesight and the chronology of his works. — 2. A. Pridik. Mut-em-wija, die Mutter Amenhotep's (Amenophis') III. — 3. A. Pridik. Der Mitregent des Königs Ptolemaios II Philadelphos. — 4. G. Suess. De Graecorum fabulis satyricis. — 5. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. I. Lief. (S. 1—160). — 6. H. Mutschmann. Studies concerning the origin of „Paradise Lost“.

B VI (1925). 1. A. Saareste. Leksikaalseist vahekordadest eesti murretes. I. Analüüs. (Du sectionnement lexicologique dans les patois estoniens. I. Analyse.) — 2. A. Bjerre. Zur Psychologie des Mordes.

B VII (1926). 1. A. v. Bulmerincq. Einleitung in das Buch des Propheten Maleachi. 4. — 2. W. Anderson. Der Chalifenmünzfund von Kochtel. (Mit Beiträgen von R. Vasmer.) — 3. J. Mägiste. Rosona (Eesti Ingeri) murde pääjooned. (Die Hauptzüge der Mundart von Rosona). — 4. M. A. Курчинский (M. A. Kurtschinsky). Европейский хаосъ. Экономическія послѣдствія великой войны. (Das europäische Chaos.)

B VIII (1926). 1. A. M. Tallgren. Zur Archäologie Eestis. II. — 2. H. Mutschmann. The secret of John Milton. — 3. L. Kettunen. Untersuchung über die livische Sprache. I. Phonetische Einführung. Sprachproben.

B IX (1926). 1. N. Maim. Parlamentarismist Prantsuse restauratsioonialjal (1814—1830). (Du parlementarisme en France pendant la Restauration.) — 2. S. v. Csekey. Die Quellen des estnischen Verwaltungsrechts. I. Teil (S. 1—102). — 3. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. II. Lief. (S. 161—288). — 4. G. Suess. De eo quem dicunt inesse Trimalchionis cenae sermone vulgari. — 5. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. III. — 6. C. Vilhelmson. De ostraco quod Revaliae in museo provinciali servatur.

B X (1927). 1. H. B. Rahamägi. Eesti Evangeeliumi Luteri usu vaba rahvakirik vabas Eestis. (Die evangelisch-lutherische freie Volkskirche im freien Eesti. Anhang: Das Gesetz betreffend die religiösen Gemeinschaften und ihre Verbände.) — 2. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. IV. — 3. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. III. Lief. (S. 289—416). — 4. W. Schmied-Kowarzik. Die Objektivation des Geistigen. (Der objektive Geist und seine Formen.) — 5. W. Anderson. Novelline popolari sammarinesi. I.

B XI (1927). 1. O. Loorits. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) I. — 2. A. Berendts und K. Grass. Flavius Josephus: Vom jüdischen Kriege, Buch I—IV, nach der slavischen Übersetzung deutsch herausgegeben und mit dem griechischen Text verglichen. IV. Lief. (S. 417—512). — 3. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. V.

B XII (1928). 1. O. Loorits. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) II. — 2. J. Mägiste. *õz*, *ei*-deminutiivid läänemeresoome keelis. (Die *õz*-, *ei*-Deminutiva der ostseefinnischen Sprachen.)

B XIII (1928). 1. G. Suess. Petronii imitatio sermonis plebe qua necessitate coniungatur cum grammatica illius aetatis doctrina. — 2. С. Штейн (S. v. Stein). Пушкин и Гофман. (Puschkin und E. T. A. Hoffmann.) — 3. A. V. Kõrv. Värsimõõt Veske „Eesti rahvalauludes“. (Le mètre des „Chansons populaires estoniennes“ de Veske.)

B XIV (1929). 1. Н. Майм (N. Maim). Парламентаризм и суверенное государство. (Der Parlamentarismus und der souveräne Staat.) — 2. S. v. Csekey. Die Quellen des estnischen Verwaltungsrechts. II. Teil (S. 103—134). — 3. E. Virányi. Thalès Bernard, littérateur français, et ses relations avec la poésie populaire estonienne et finnoise.

B XV (1929). 1. A. v. Bulmerincq. Kommentar zum Buche des Propheten Malcachi. 1 (1, 2—11). — 2. W. E. Peters. Benito

Mussolini und Leo Tolstoi. Eine Studie über europäische Menschheitstypen. — 3. W. E. Peters. Die stimmanalytische Methode. — 4. W. Freymann. Platons Suchen nach einer Grundlegung aller Philosophie.

B XVI (1929). 1. O. Loorits. Liivi rahva usund. (Der Volksglaube der Liven.) III. — 2. W. Süss. Karl Morgenstern (1770—1852). I. Teil (S. 1—160).

B XVII (1930). 1. A. R. Cederberg. Heinrich Fick. Ein Beitrag zur russischen Geschichte des XVIII. Jahrhunderts. — 2. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. VI. — 3. W. E. Peters. Wilson, Roosevelt, Taft und Harding. Eine Studie über nordamerikanisch-englische Menschheitstypen nach stimmanalytischer Methode. — 4. N. Maim. Parlamentarism ja fašism. (Parliamentarism and fascism.)

B XVIII (1930). 1. J. Vasar. Taani püüded Eestimaa taasvallutamiseks 1411—1422. (Dänemarks Bemühungen Estland zurückzugewinnen 1411—1422.) — 2. L. Leesment. Über die livländischen Gerichtssachen im Reichskammergericht und im Reichshofrat. — 3. A. И. Стендер-Петерсен (A. d. Stender-Petersen). О пережиточных следах аориста в славянских языках, преимущественно в русском. (Über rudimentäre Reste des Aorists in den slavischen Sprachen, vorzüglich im Russischen.) — 4. М. Курчичинский (M. Kourtschinsky). Соединенные Штаты Европы. (Les États-Unis de l'Europe.) — 5. K. Wilhelmson. Zum römischen Fiskalkauf in Ägypten.

B XIX (1930). 1. A. v. Bulmerincq. Kommentar zum Buche des Propheten Maleachi. 2 (1, 11—2, 9). — 2. W. Süss. Karl Morgenstern (1770—1852). II. Teil (S. 161—330). — 3. W. Anderson. Novelline popolari sammarinesi. II.

B XX (1930). 1. A. Oras. Milton's editors and commentators from Patrick Hume to Henry John Todd (1695—1801). I. — 2. J. Vasar. Die grosse livländische Güterreduktion. Die Entstehung des Konflikts zwischen Karl XI. und der livländischen Ritter- und Landschaft 1678—1684. Teil I (S. 1—176). — 3. S. v. Csekey. Die Quellen des estnischen Verwaltungsrechts. III. Teil (S. 135—150).

B XXI (1931). 1. W. Anderson. Der Schwank vom alten Hildebrand. Teil I (S. 1—176). — 2. A. Oras. Milton's editors and commentators from Patrick Hume to Henry John Todd (1695—1801). II. — 3. W. Anderson. Über P. Jensens Methode der vergleichenden Sagenforschung.

B XXII (1931). 1. E. Tennmann. G. Teichmüllers Philosophie des Christentums. — 2. J. Vasar. Die grosse livländische Güterreduktion. Die Entstehung des Konflikts zwischen Karl XI. und der livländischen Ritter- und Landschaft 1678—1684. Teil II (S. I—XXVII. 177—400).

B XXIII (1931). 1. W. Anderson. Der Schwank vom alten Hildebrand. Teil II (S. I—XIV. 177—329). — 2. A. v. Bulmerincq. Kommentar zum Buche des Propheten Maleachi. 3 (2, 10—3, 3). —

3. P. Arumaa. Litauische mundartliche Texte aus der Wilnaer Gegend. — 4. H. Mutschmann. A glossary of americanisms.

B XXIV (1931). 1. L. Leesment. Die Verbrechen des Diebstahls und des Raubes nach den Rechten Livlands im Mittelalter. — 2. N. Maim. Völkerbund und Staat. Teil I (S. 1—176).

B XXV (1931). 1. Ad. Stender-Petersen. Tragoediae Sacrae., Materialien und Beiträge zur Geschichte der polnisch-lateinischen Jesuitendramatik der Frühzeit. — 2. W. Anderson. Beiträge zur Topographie der „Promessi Sposi“. — 3. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. VII.

B XXVI (1932). 1. A. v. Bulmerincq. Kommentar zum Buche des Propheten Maleachi. 4 (3, 3—12). — 2. A. Pridik. Wer war Mutemwija? — 3. N. Maim. Völkerbund und Staat. Teil II (S. I—III. 177—356).

B XXVII (1932). 1. K. Schreinert. Johann Bernhard Hermann. Briefe an Albrecht Otto und Jean Paul (aus Jean Pauls Nachlass). I. Teil (S. 1—128). — 2. A. v. Bulmerincq. Kommentar zum Buche des Propheten Maleachi. 5 (3, 12—24). — 3. M. J. Eisen. Kevadised pühad. (Frühlingsfeste.) — 4. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. VIII.

B XXVIII (1932). 1. P. Pöld. Üldine kasvatusõpetus. (Allgemeine Erziehungslehre.) Redigeerinud (redigiert von) J. Tork. — 2. W. Wiget. Eine unbekannte Fassung von Klingers Zwillingen. — 3. A. Oras. The critical ideas of T. S. Eliot.

B XXIX (1933). 1. L. Leesment. Saaremaa halduskonna finantsid 1618/19. aastal. (Die Finanzen der Provinz Ösel im Jahre 1618/19.) — 2. L. Rudrauf. Un tableau disparu de Charles Le Brun. — 3. P. Ariste. Eesti-rootsi laensõnad eesti keeles. (Die estlandschwedischen Lehnwörter in der estnischen Sprache.) — 4. W. Süß. Studien zur lateinischen Bibel. I. Augustins Locutiones und das Problem der lateinischen Bibelsprache. — 5. M. Kurtschinsky. Zur Frage des Kapitalprofits.

B XXX (1933). 1. A. Pridik. König Ptolemaios I und die Philosophen. — 2. K. Schreinert. Johann Bernhard Hermann. Briefe an Albrecht Otto und Jean Paul (aus Jean Pauls Nachlass). II. Teil (S. I—XLII + 129—221). — 3. D. Grimm. Zur Frage über den Begriff der Societas im klassischen römischen Rechte. — 4. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. IX.

B XXXI (1934). 1. E. Päss. Eesti liulaul. (Das estnische Rodellied.) — 2. W. Anderson. Novelline popolari sammarinesi. III. — 3. A. Kurlents. „Vanemate vara“. Monograafia ühest joomaulust. („Der Eltern Schatz“. Monographie über ein Trinklied.) — 4. E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. X.

B XXXII (1934). 1. A. Anni. F. R. Kreutzwaldi „Kalevipoeg“. I osa: Kalevipoeg eesti rahvaluules. (F. R. Kreutzwalds „Kalevipoeg“. I. Teil: Kalevipoeg in den estnischen Volksüberlieferungen.) — 2. P. Arumaa. Untersuchungen zur Geschichte der litauischen

Personalpronomina. — **3.** E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. XI. — **4.** L. Gulkowitsch. Die Entwicklung des Begriffes *Ḥasīd* im Alten Testament. — **5.** H. Laakmann und W. Anderson. Ein neues Dokument über den estnischen Metsik-Kultus aus dem Jahre 1680.

B XXXIII (1936). **1.** A. Annist (Anni). Fr. Kreutzwaldi „Kalevipoeg“. II osa: „Kalevipoja“ saamislugu. (Fr. Kreutzwaldi „Kalevipoeg“. II. Teil: Die Entstehungsgeschichte des „Kalevipoeg“.) — **2.** H. Mutschmann. Further studies concerning the origin of Paradise Lost. (The matter of the Armada.) — **3.** P. Arumaa. De la désinence -*ts* du présent en slave. — **4.** O. Loorits. Pharaos Heer in der Volksüberlieferung. I. — **5.** E. Kieckers. Sprachwissenschaftliche Miscellen. XII.

B XXXIV (1935). **1.** W. Anderson. Studien zur Wortsilbenstatistik der älteren estnischen Volkslieder. — **2.** P. Ariste. Huulte vönkehäalik eesti keeles. (The labial vibrant in Estonian.) — **3.** P. Wieselgren. Quellenstudien zur Volsungasaga. I (S. 1—154).

B XXXV (1935). **1.** A. Pridik. Berenike, die Schwester des Königs Ptolemaios III Euergetes. I. Hälfte (S. 1—176). — **2.** J. Taul. Kristluse jumalariigi õpetus. (Die Reich-Gottes-Lehre des Christentums.) I pool (lk. I—VIII. 1—160).

B XXXVI (1935). **1.** A. Pridik. Berenike, die Schwester des Königs Ptolemaios III Euergetes. II. Hälfte (S. I—VIII. 177—305). — **2.** J. Taul. Kristluse jumalariigi õpetus. (Die Reich-Gottes-Lehre des Christentums.) II pool (lk. 161—304).

B XXXVII (1936). **1.** A. v. Bulmerincq. Die Immanuelweissagung (Jes. 7) im Lichte der neueren Forschung. — **2.** L. Gulkowitsch. Das Wesen der maimonideischen Lehre. — **3.** L. Gulkowitsch. Rationale und mystische Elemente in der jüdischen Lehre. — **4.** W. Anderson. Achtzig neue Münzen aus dem Funde von Naginščina. — **5.** P. Wieselgren. Quellenstudien zur Volsungasaga. II (S. 155—238). — **6.** L. Gulkowitsch. Die Bildung des Begriffes *Ḥasīd*. I.

C I—III (1929). **I 1.** Ettelugemiste kava 1921. aasta I poolaastal. — **I 2.** Ettelugemiste kava 1921. aasta II poolaastal. — **I 3.** Dante pidu 14. IX. 1921. (Dantefeier 14. IX. 1921.) R. Gutmann. Dantes Alighieri. W. Schmied-Kowarzik. Dantes Weltanschauung. — **II 1.** Ettelugemiste kava 1922. aasta I poolaastal. — **II 2.** Ettelugemiste kava 1922. aasta II poolaastal. — **III 1.** Ettelugemiste kava 1923. aasta I poolaastal. — **III 2.** Ettelugemiste kava 1923. aasta II poolaastal.

C IV—VI (1929). **IV 1.** Ettelugemiste kava 1924. aasta I poolaastal. — **IV 2.** Ettelugemiste kava 1924. aasta II poolaastal. — **V 1.** Ettelugemiste kava 1925. aasta I poolaastal. — **V 2.** Ettelugemiste kava 1925. aasta II poolaastal. — **VI 1.** Ettelugemiste kava 1926. aasta I poolaastal. — **VI 2.** Ettelugemiste kava 1926. aasta II poolaastal.

C VII—IX (1929). **VII 1.** Ettelugemiste kava 1927. aasta I poolaastal. — **VII 2.** Ettelugemiste kava 1927. aasta II poolaastal. — **VIII 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1928. aasta I poolaastal. — **VIII 2.**

Loengute ja praktiliste tööde kava 1928. aasta II poolaastal. — **IX 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1929. aasta I poolaastal. — **IX 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1929. aasta II poolaastal. — **IX 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1929.

C X (1929). Eesti Vabariigi Tartu Ülikool 1919—1929.

C XI—XIII (1934). **XI 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1930. aasta I poolaastal. — **XI 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1930. aasta II poolaastal. — **XI 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1930. — **XII 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1931. aasta I poolaastal. — **XII 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1931. aasta II poolaastal. — **XII 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1931. — **XIII 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1932. aasta I poolaastal. — **XIII 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1932. aasta II poolaastal. — **XIII 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1932. — **XIII 4.** K. Schreinert. Goethes letzte Wandlung. Festrede. — **XIII 5.** R. Mark. Dotsent Theodor Korssakov †. Nekroloog.

C XIV (1932). Tartu Ülikooli ajaloo allikaid. I. Academia Gustaviana. a) Ürikuid ja dokumente. (Quellen zur Geschichte der Universität Tartu (Dorpat). I. Academia Gustaviana. a) Urkunden und Dokumente.) Koostanud (herausgegeben von) J. V a s a r.

C XV (1932). L. V i l l e c o u r t. L'Université de Tartu 1919—1932.

C XVI—XVIII (1936). **XVI 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1933. aasta I poolaastal. — **XVI 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1933. aasta II poolaastal. — **XVI 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1933. — **XVII 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1934. aasta I poolaastal. — **XVII 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1934. aasta II poolaastal. — **XVII 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1934. — **XVII 4.** R. Ö u n a p. Tartu Ülikooli Õigusteaduskonna kriminalistikaõpetaja A. P. Melnikov †. — **XVII 5.** F. P u k s o v. Rahvusvahelise vaimse koostöötamise institutsioonid ja nende tegevus 1932—1933. — **XVIII 1.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1935. aasta I poolaastal. — **XVIII 2.** Loengute ja praktiliste tööde kava 1935. aasta II poolaastal. — **XVIII 3.** Eesti Vabariigi Tartu Ülikooli isiklik koosseis 1. detsembril 1935.

Eesti koha- ja tänavanimed peavad olema väljendatud maksvate eestikeelsete nimetuste järgi kõigis Eestis avaldatavais trükitooteis ja perioodilise trükitoote nimetuses. Erandina võidakse tarvitada Eesti koha- või tänavanime muukeelset väljendust trükis avaldatavais ajaloolistes ürikuis ja üldse kirjutistes, kus koha- või tänavanimi esineb ajaloolises käsitluses. (Riigi Teataja 2 — 1935, art. 12, § 13.)

Les noms de lieux et de rues de l'Estonie doivent être donnés dans leur forme estonienne officielle dans tous les imprimés publiés en Estonie, et aussi dans les titres des périodiques. Exceptionnellement, on peut employer les formes étrangères des noms de lieux et de rues de l'Estonie en publiant des documents historiques, et en général dans des écrits où le nom d'un lieu ou d'une rue est traité du point de vue historique. (Riigi Teataja 2 — 1935, art. 12, § 13.)

TARTU ÜLIKOOI TOIMETUSED ilmuvad kolmes seerias:

A: Mathematica, physica, medica. (Matemaatika-loodusteaduskonna, arstiteaduskonna, loomaarstiteaduskonna ja põllumajandusteaduskonna tööd.)

B: Humaniora. (Usuteaduskonna, filosoofiateaduskonna ja õigusteaduskonna tööd.)

C: Annales. (Aastaruanded.)

Ladu: Ülikooli Raamatukogus, Tartus.

LES PUBLICATIONS DE L'UNIVERSITÉ DE TARTU (DORPAT) se font en trois séries:

A: Mathematica, physica, medica. (Mathématiques, sciences naturelles, médecine, sciences vétérinaires, agronomie.)

B: Humaniora. (Théologie, philosophie, philologie, histoire, jurisprudence.)

C: Annales.

Dépôt: La Bibliothèque de l'Université de Tartu, Estonie.
